गणिताची अपूर्वाई

डॉ. विवेक पाटकर

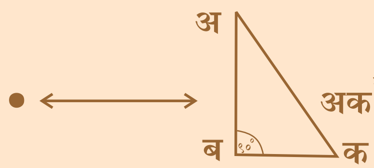
{},0, १, १, २, ३, ५, ८, १३, ...

$\sqrt{२}$, π, e, $२ + ३i$

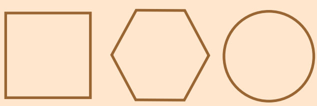
$+$, $\sum$, $\int$, ∞

रामानुजन अंक : १७२९

कापरेकर स्थिरांक : ६१७४

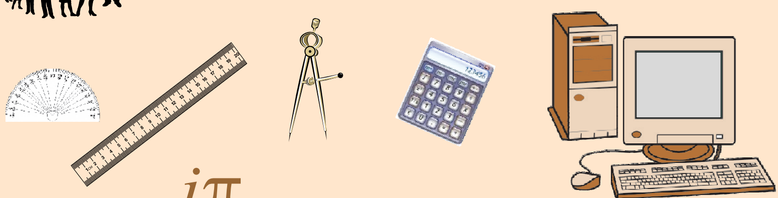


$अक^२ = अब^२ + बक^२$









$e^{i\pi} + १ = 0$

गणिताची अपूर्वाई

डॉ. विवेक पाटकर

मुंबई
मे २००८

गणिताची अपूर्वाई

Ganitachi Apurvai

डी-१, अनिता को-ऑप. सोसायटी,
प्लॉट ६१२, सेक्टर ६, चारकोप,
कांदिवली (पश्चिम), मुंबई ४०० ०६७.
इ-मेल : vnpatkar2004@yahoo.co.in

पहिली आवृत्ती : मे २००८

मुद्रक
दि पॅकेज
१९६ आय, कात्रक कम्पाउण्ड, गायवाडी,
गिरगाव, मुंबई-४०० ००४.
दूरध्वनी : २३८८८५६२

मुखपृष्ठ/मांडणी
सुबोध आर्टस्
१९६ आय, कात्रक कम्पाउण्ड, गायवाडी,
गिरगाव, मुंबई-४०० ००४.
दूरध्वनी : २३८८८५०९

मला प्रत्यक्ष किंवा अप्रत्यक्षपणे आयुष्याच्या विविध टप्प्यांवर गणिताची सुंदरता व उपयोगिता यांबाबत मोलाचे मार्गदर्शन करणाऱ्या पुढील प्रज्ञावंताना अर्पणः

आर्किमिडीज (Archimedes)

युक्लिड (Euclid)

गौस, सी. एफ. (Gauss, C. F.)

यावलकर, के. एन. (Yawalkar, K. N.)

डँटझिग, जी. बी. (Dantzig, G. B.)

डफीन, आर. जे. (Duffin, R. J.)

वॉरफील्ड, जे. एन. (Warfield, J. N.)

कापरेकर, डी. आर. (Kaparekar, D. R.)

साटी, टी. एल. (Saaty, T. L.)

वुल्फ, एच. इ. (Wolfe, H. E.)

वाइनर, एन. (Wiener, N.)

हॉवर्ड, एन. (Howard, N.)

झेलेनी, एम. (Zeleny, M.)

‘महाराष्ट्र टाइम्स’, मुंबई या दैनिकाने माझे प्रसिद्ध केलेले लेख या पुस्तकात वापरण्यासाठी परवानगी दिल्याबद्दल मी अत्यंत आभारी आहे.

या पुस्तकात समाविष्ट केलेले महाराष्ट्र टाइम्स मधील पूर्वप्रसिद्ध लेख :

१) डरना मना हैं। (२३/०५/०७)

२) पुरस्कार गणिताचा (३०/०५/०७)

३) गणिताचं सौंदर्य (०६/०६/०७)

४) गणिताचा वाढता पसारा (१३/०६/०७)

५) गणितातील औपचारिकता (२०/०६/०७)

६) रांगेचं गणित (२७/०६/०७)

७) साठवणीचं गणित (०४/०७/०७)

८) गॅरण्टी आणि गणित (११/०७/०७)

९) निर्णय घेताना (१८/०७/०७)

१०) रांगोळीचं गणित (२५/०७/०७)

११) स्टॅटिस्टिशियन नर्स (०१/०८/०७)

१२) गणिताची ‘भाषा’ (०८/०८/०७)

१३) खेल खेल में... (२२/०८/०७)

१४) वैदिक गणित (२९/०८/०७)

१५) ‘खेळ’ आकड्यांचा (१२/०९/०७)

१६) अंकांचं अफाट विश्व (१९/०९/०७)

१७) गणितातील करिअर (२६/०९/०७)

१८) गणितातील कार्यपद्धती (०३/१०/०७)

१९) महत्त्व ० आणि १ यांचं ! (१०/१०/०७)

२०) जर्मन गणितज्ज्ञांची महान परंपरा (१७/१०/०७)

२१) फ्रान्समधले गणितज्ज्ञ (२४/१०/०७)

२२) ब्रिटिश गणितज्ज्ञांचं योगदान (३१/१०/०७)

२३) असामान्य गणितज्ज्ञ (१४/११/०७)

२४) शक्याशक्यतांचं गणित (२१/११/०७)

२५) लाइफ सायन्स+गणित (२८/११/०७)

२६) विभिन्न जाळी आणि गणित (०५/१२/०७)

२७) कसा करावा अभ्यास गणिताचा ? (१२/१२/०७)

२८) गणित शिकवावं कसं ? (१९/१२/०७)

२९) निवडक गणिती दीपस्तंभ (२६/१२/०७)

३०) गणिती साधनं आणि उपकरण (०२/०१/०८)

३१) टाइम मॅनेजमेण्ट (०९/०१/०८)

३२) ‘जर-तर’चं गणित (१६/०१/०८)

३३) लायब्ररीचं गणित (२३/०१/०८)

३४) विवादमुक्तीसाठी गणित (३०/०१/०८)

३५) लेखन गणिताचं (०६/०२/०८)

३६) इतिहास गणिताचा (१३/०२/०८)

३७) प्रवास अंक आणि गणिती चिन्हांचा (२०/०२/०८)

३८) कथा स्टॅटिस्टिक्सची (२७/०२/०८)

३९) कठीण प्रश्न (१२/०३/०८)

४०) गणितातील शोकांतिका (२६/०३/०८)

४१) गणिताला मानाचा मुजरा (०९/०४/०८)

मनोगत

मनुष्याने इतर सर्व प्राणिमात्रांवर निर्विवाद वर्चस्व स्थापण्यास मूलतः भाषा व गणित यांचा विकास तसेच आगीवर नियंत्रण आणि चाकाचा शोध कारणीभूत आहेत. गणिताची मागील शंभर वर्षांतील प्रगती तर विस्मयकारक आहे. निसर्गाची रहस्ये उकलण्याची गुरूकिल्ली गणितात दडलेली आहे असं म्हटल्यास वावगं ठरू नये.

गणित हे केवळ तर्कशास्त्र, यांत्रिकी पद्धती व अमूर्त कल्पना यांचं मिश्रण नसून त्याचे अनंत पदर आहेत. रांगेपासून ते रांगोळीपर्यंत, खेळापासून ते गोपनीय संदेशांचे विश्लेषण अशा विविध क्षेत्रांत गणिताचा उपयोग सातत्याने होत आहे. मूलभूत व उपयोजित गणित तसेच सांख्यिकी, ऑपरेशन्स रिसर्च व संगणकशास्त्र या सर्व संलग्न विषयांचं अध्ययन, अध्यापन, संशोधन, लेखन आणि निरनिराळ्या परिस्थितीत त्यांचा वापर करण्याची संधी मला वेळोवेळी मिळाली. त्यामुळे गणिताची लक्षणीय उपयुक्तता तसेच विराट रूपाची कल्पना येत गेली. कुतूहल आजही कायम आहे.

मात्र सर्वसामान्यपणे गणिताबाबत भीतीयुक्त आदर आढळतो. काही प्रमाणात रूक्षता, औपचारिकता, अलवचिकता अशा बाबींमुळे गणिताबाबत अढीही निर्माण होताना दिसते. पण गणिताचे इतर अनेक रंजक पैलू आहेत ज्यांच्याकडे दुर्लक्ष होते. तरी गणिताची विस्तारित ओळख एका लेखमालेतून सर्वांना करून द्यावी हा माझा प्रस्ताव 'महाराष्ट्र टाइम्स' या दैनिकाने अविलंब मान्य केला हे विशेष. त्याप्रमाणे माझे एकूण एक्केचाळीस लेख या वर्तमान-पत्राच्या बुधवारच्या 'मुंबई टाइम्स' या पुरवणीत ''मॅथमॅजिक'' या सदराखाली मे २००७ ते एप्रिल २००८ या काळात प्रसिद्ध झाले.

या संपूर्ण लेखमालेला वाचकांकडून उदंड असा प्रतिसाद मिळाला. विद्यार्थी, पालक, प्राध्यापक, संशोधक, ज्येष्ठ नागरिक अशा विविध गटातील व्यक्तींनी मला नेमाने त्यांचे विचार कळवले व प्रोत्साहनही दिलं. या लेखांतून काहीतरी नवीन समजलं किंवा गणिताचा उपयोग कसा होऊ शकतो याबाबत

मार्गदर्शन मिळालं, अशी उत्साहवर्धक प्रतिक्रिया वारंवार मिळाली. तसेच या लेखमालेचं पुस्तकात रूपांतर करावं अशी सूचना अनेकांनी केली. म्हणून त्या लेखांवर आवश्यक असे संपादकीय संस्कार करून व भर घालून हे पुस्तक वाचकांच्या हाती देण्यात एक समाधान मिळत आहे. गणिताची अशी सेवा करता येणं हे भाग्यच म्हटलं पाहिजे.

गणिताचा विस्तार, व्यापक उपयोग, इतिहास, भव्यता अशी वैशिष्ट्ये सोप्या भाषेत मांडण्याचा प्रयत्न इथे केला आहे. पुस्तक कुठूनही वाचलं तरी चालेल कारण प्रत्येक लेख स्वंयपूर्ण असावा यावर भर दिला आहे. अचूक अर्थ समजण्यासाठी तांत्रिक शब्द इंग्रजीतूनही दिले आहेत. तसेच वाचकांच्या सोयीसाठी निवडक पुस्तकांची यादी शेवटी दिली आहे. प्रत्येकासाठी या पुस्तकात काहीतरी उपयोगी माहिती आहे असा विश्वास मला वाटतो.

चिकाटी, मनाची एकाग्रता व निरंतर सराव हे घटक गणिताच्या अभ्यासाचा पाया आहेत व त्यांना पर्याय नाही. गणिताचा आयुष्यात अनेक प्रकारे उपयोग होतो हा माझा अनुभव आहे व तोच संदेश हे पुस्तक देत आहे. पण विकाराधीन होऊन आयुष्याचं गणित चुकू नये याची काळजी प्रत्येकाने घेतली पाहिजे कारण दुरुस्तीची संधी मिळेलच असं नाही, आणि वेळेचं गणित बदलणे सहसा शक्य होत नाही. काही मर्यादा ओलांडण्याचं गणित सोडवणे अशक्य आहे हे देखिल गणित सांगतं हे विसरता कामा नये.

मुंबई, १७ मे २००८ — डॉ. विवेक पाटकर

आभार

'महाराष्ट्र टाइम्स' या दैनिकाच्या संपादकीय विभागातील सौ. मिताली मापुसकर यांनी माझे लेख अधिक रंगतदार करण्यासाठी विशेष श्रम घेतले त्याबद्दल मी तिचा आभारी आहे.

'मराठी विज्ञान परिषदे'चे कार्यवाह श्री. अ. पां. देशपांडे यांनी माझ्या अनेक लेखांवर तत्परतेने व काही वेळा परखडपणे प्रतिक्रिया कळवल्या त्याबद्दल मी त्यांचे आभार मानतो. त्याशिवाय इतर बऱ्याच वाचकांनी देखिल त्यांचे विचार व सूचना कळवल्या ज्यांचा मला फायदा झाला. त्या सर्वांची नावे नमूद करणे शक्य नाही, तरी मी त्यांचे मनःपूर्वक आभार मानतो.

मुंबई विद्यापीठाचे माजी ग्रंथपाल प्राध्यापक अरविंद टिकेकर व नोएटिक टेक्नॉलाजीचे प्रमुख श्री. योगेश पालकर यांनी हे पुस्तक प्रसिद्ध करण्यासाठी प्रोत्साहन व सहकार्य दिल्याबद्दल मी त्यांचे विशेष आभार मानतो.

गणिताच्या विविध पैलूंवर व्याख्याने देण्याची संधी मला अनेक संस्थानी दिली. मी त्यांचे व सर्व श्रोत्यांचा आभारी आहे, कारण तो प्रत्येक अनुभव मला काही तरी शिकवून गेला.

माझ्या या लेखनासाठी मुंबई विद्यापीठ, एशियाटीक सोसायटी व होमी भाभा विज्ञानशिक्षण केंद्र या मुंबईतील ग्रंथालयांची भरघोस मदत मिळाली, तरी मी त्यांच्या सर्व कर्मचारी वर्गाचा आभारी आहे.

माझे थोरले बंधु श्री. सुरेन्द्र पाटकर यांनी माझ्या गणिताच्या प्राथमिक अभ्यासाच्या काळात केलेलं मार्गदर्शन मोलाचं ठरलं व त्याबद्दल मी त्यांचा ऋणी आहे. अपार परिश्रम घेऊन गणिताचं अध्यापन व लेखन करणाऱ्या माझ्या सर्वात थोरल्या वहिनी श्रीमती शीतल दिलीप पाटकर यांनी मला नेहमीच प्रोत्साहित केलं आहे व त्याबद्दल आभार व्यक्त करणे ही औपचारिकता मात्र ठरेल.

– डॉ. विवेक पाटकर

लेखकाबद्दल –

डॉ. विवेक पाटकर हे दिल्ली विद्यापीठाचे गणितातील बी.एस्सी. (ऑनर्स) आणि ऑपरेशनल रिसर्च या विषयातील एम. एस्सी. व पीएच. डी. आहेत. ते आता एक स्वतंत्र संशोधक म्हणून कार्यरत आहेत. त्यापूर्वी मुंबई महानगर प्रदेश विकास प्राधिकरण या संस्थेत प्रवर्तन संशोधन विशेषज्ञ व नंतर आयसीएफएआय बिझनेस स्कूल, मुंबई येथे गणितशास्त्राचे प्राध्यापक म्हणून त्यांनी काम केले आहे. मुंबई विद्यापीठाच्या ग्रंथालय व माहितीशास्त्र विभागाशी ते मागील वीस वर्षे संलग्न आहेत.

डॉ. पाटकर यांना गणित व इतर अनेक विषयांतील संशोधनाचा प्रदीर्घ अनुभव आहे. अनेक वेळा एम्. टेक. व पीएच. डी. पदवीसाठी परीक्षक म्हणून आय. आय. टी. व आय. आय. एम. या भारतातील अग्रगण्य संस्थांनी त्यांना आमंत्रित केलं आहे. त्यांचं 'संशोधन–मार्गावरील प्रवास' (२००७) हे पुस्तक बरंच गाजलं आहे. त्याशिवाय त्यांनी पाच पुस्तकांचं सहलेखन केलं आहे. त्यांचे अडीचशेहून अधिक शोधनिबंध व इतर लेख आंतरराष्ट्रीय व राष्ट्रीय नियतकालिकांत प्रसिद्ध झाले आहेत. गणित, संगणक, नगरविकास, परिवहन, ग्रंथालय, तंत्रज्ञान, व्यवस्थापन अशा अनेक क्षेत्रांत त्यांचं संशोधन व लेखन आहे.

हॉलंडमधून प्रसिद्ध होणाऱ्या 'ह्युमन सिस्टिम्स् मॅनेजमेण्ट' या त्रैमासिकाच्या तसेच 'जर्नल ऑफ जीओमॅटिक्स' या भारतीय द्विवार्षिकाच्या संपादक मंडळाचे ते सदस्य आहेत. अनेक राष्ट्रीय व आंतरराष्ट्रीय व्यावसायिक व सेवाभावी संस्थांशी डॉ. पाटकर निगडित आहेत.

संपर्क :
डॉ. विवेक पाटकर
डी–१, अनिता को–ऑप. सोसायटी,
प्लॉट ६१२, सेक्टर ६, चारकोप,
कांदिवली (पश्चिम), मुंबई ४०० ०६७.
इ–मेल : vnpatkar2004@yahoo.co.in

अनुक्रमणिका

१. डरना मना हैं ! १
२. पुरस्कार गणिताचा ५
३. सौंदर्य आणि गणित १०
४. गणिताचा वाढता पसारा १५
५. गणितातली औपचारिकता १९
६. रांगेचं गणित २३
७. साठवणीचं गणित २७
८. गॅरण्टी आणि गणित ३१
९. निर्णय घेताना ३४
१०. रांगोळीचं गणित ३८
११. स्टॅटिस्टिशियन नर्स ४२
१२. गणिताची 'भाषा' ४६
१३. खेल खेल मे... .... ५०
१४. वैदिक गणित ५४
१५. क्रीडा-जगतात गणित ५८
१६. अंकाचं अफाट विश्व ६२
१७. गणितातील करिअर ६६
१८. गणितातील प्रमुख कार्यपद्धती ७०
१९. महत्त्व ० आणि १ यांचं ! ७४
२०. जर्मन गणितज्ज्ञांची महान परंपरा ७८
२१. फ्रान्समधले गणितज्ज्ञ ८२
२२. ब्रिटिश गणितज्ज्ञांचं योगदान ८६

२३. असामान्य गणितज्ज्ञ ९०
२४. शक्याशक्यतांचं गणित ९४
२५. जीवनविज्ञान + गणित ९८
२६. विभिन्न जाळी आणि गणित १०२
२७. कसा करावा अभ्यास गणिताचा ? १०६
२८. गणित शिकवावं कसं ? ११०
२९. निवडक गणिती दीपस्तंभ ११४
३०. गणिती साधनं आणि उपकरणं ११९
३१. वेळेचं गणित १२३
३२. 'जर-तर'चं गणित १२७
३३. लायब्ररीचं गणित १३१
३४. विवादमुक्तीसाठी गणित १३५
३५. लेखन गणिताचं १३९
३६. इतिहास गणिताचा १४३
३७. प्रवासः अंक आणि गणिती चिन्हांचा १४७
३८. कथा स्टॅटिस्टिक्सची १५१
३९. रेंगाळलेले प्रश्न १५५
४०. गणितातील शोकांतिका १५९
४१. भूमितीचा प्रवास १६३
४२. जटिलतेचं गणित १६७
४३. लेखनाचं गणित १७१
४४. वितरणाचं गणित १७५
४५. गणिताला मानाचा मुजरा १७९
निवडक संदर्भ सूची १८३
व्यक्तीनाम सूची १८५
विषयसूची १८८

१

डरना मना हैं !

+× ∑ ∫

रोजच्या व्यवहारात प्रत्यक्ष किंवा अप्रत्यक्षपणे गणिताचा वापर सर्रास होतो. उदा. हिशोब करायचाय, टीव्ही मालिकांचा टीआरपी मोजायचाय, एखादी निवडणूक घ्यायची असो, अथवा बेटिंग करायचं असो; आधार घ्यावा लागतो तो आकड्यांचाच. गणिताचं जग आकड्याशिवाय पूर्णच होऊ शकत नाही. मात्र गणिताची दुनिया खूप रंजक व अथांग पसरलेली आहे. त्यामुळे गणित म्हणजे एक कठीण व रूक्ष विषय हे समीकरण बदलणे गरजेचे आहे.

अन्य प्राण्यांच्या तुलनेत माणसाने आपल्या बुद्धीच्या जोरावर सर्वांवर मात केली आहे. केवळ पृथ्वीवरच नाही, तर तो आता परग्रहावरही वर्चस्व स्थापण्याच्या दृष्टीने तयारी करतोय. बुद्धीचं हे वरदान मुख्यत: दोन प्रकारे विकसित झालं आहे. एक म्हणजे मानवी भाषेचा विकास, ज्यामुळे विचारांची देवाण-घेवाण शक्य झाली आणि दुसरं म्हणजे गणित विषयाचा विकास आणि वापर.

आपल्या दैनंदिन आयुष्यात प्रत्यक्ष किंवा अप्रत्यक्षपणे गणिताधारित प्रक्रियांची मदत घ्यावी लागते. कुठलीही आर्थिक उलाढाल असो किंवा स्कोअरबोर्ड, निवडणुकीचे निकाल असो; बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार आणि त्याचबरोबर इतर काही सोपी सूत्रं, कोष्टकं (टेबल्स) यांचा वापर अनिवार्य ठरतो, एवढंच नाही, तर अवकाशात उपग्रह सोडताना, मोठा पूल (ब्रीज) बांधताना गणितातील प्रक्रिया आणि आकडेमोडीचाच आधार घ्यावा लागतो. या कामात संगणकाची मदत होत असली, तरी या प्रक्रिया कशा करायच्या हे गणितातूनच कळतं. संगणकही गणितातील मूलभूत संशोधनामुळे तयार होऊ शकला आहे.

वेगवेगळ्या ठिकाणी गणिताचा वापर होत असला तरी पण शाळाकॉलेजमध्ये या विषयाचा अभ्यास करताना अनेकांना त्याचा कंटाळा तरी येतो किंवा हा विषय कठीण वाटतो. विद्यार्थ्यांना दडपण जाणवण्याचं मुख्य कारण म्हणजे गणिताचं अमूर्त (abstract) स्वरूप आणि काटेकोरपणा. गणितामध्ये तडजोडीला वाव नसतो आणि तर्कशास्त्राच्या चौकटीत राहून साचेबद्धपणे प्रक्रिया करणं अपेक्षित असतं. नेमकी हीच शिस्तबद्धता जाचक वाटते आणि हा विषय रसहीन वाटू लागतो. उदाहरणार्थ, गणिती नियमाप्रमाणे तीन संत्री आणि चार मोसंबी यांची बेरीज करता येत नाही. पण आपण एकूण सात फळं असा निर्देश करून पुढे जाण्याचा मार्ग काढतो. व्यवहाराच्या दृष्टीने असं उत्तर कदाचित उपयोगी ठरेल पण गणित त्याला मान्यता देत नाही. अशी तडजोड गणिताच्या पायालाच धक्का देऊ शकेल.

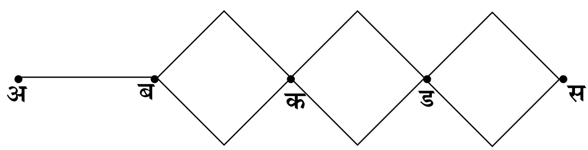
गणिती पद्धतीने काढलेले निष्कर्ष हे स्थळ आणि काळानुसार बदलणारे नसावेत याच भूमिकेतून गणिताची उभारणी करण्यावर कटाक्षाने भर देण्यात येतो. म्हणूनच अमूर्त संकल्पनांची मदत घेणं भाग पडतं. उदाहरणार्थ, गणिती नियमांनुसार पुढील बेरीज बरोबर आहे:

रुपये १०२५ = १००० रुपये + २५ रुपये किंवा २५ रुपये + १००० रुपये.

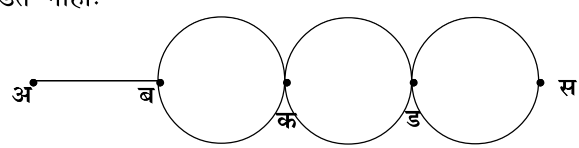
पण हेच समीकरण, *रुपये १०२५ = माझे १००० रुपये + तुमचे २५ रुपये किंवा माझे २५ रुपये + तुमचे १००० रुपये* असं मांडलं, तर व्यवहाराच्या दृष्टिकोनातून फार वेगळा अर्थ निघतो. या प्रमाणे परिस्थितीनुसार उत्तर बदलत राहणं गणिताला मान्य नाही. यासाठीच एक, दोन, तीन अशा अमूर्त स्वरूपातील अंक आणि संख्या वापरण्यावर गणिताचा भर आहे. हे अंक

कुठल्याही वस्तुशी निगडित नसून संकल्पना (कॉन्सेप्ट) मानणं इष्ट ठरतं. त्याचप्रमाणे भूमितीमधील रेषा, त्रिभुज, चौकोन, वर्तुळ आणि इतर आकृत्याही आदर्श संकल्पना आहेत. त्या लाकूडापासून किंवा स्टीलपासून तयार करण्यात आल्या आहेत याचा गणिताच्या दृष्टीने काहीही फरक पडत नाही.

अमूर्त संकल्पनांचा वापर केल्यामुळे गणिती-प्रक्रियांवरील बंधनं किमान स्वरूपाची राहतात. त्यामुळे गणिताचा वापर अनेक क्षेत्रांत करता येतो. उदाहरणार्थ, खालील आकृती 'अ' स्थानापासून 'स' स्थानापर्यंत जाण्याचा मार्ग दाखवते.



हीच आकृती खालीलप्रमाणे आखली, तरी गणिताच्या दृष्टीने काहीही फरक पडत नाहीः



यापुढे जाऊन वरील आकृत्यांना खालील तक्ता स्वरूपात मांडता येईल. या तक्त्यातील पहिली ओळ दाखवते की अ पासून ब पर्यंत थेट जाण्यासाठी एक मार्ग आहे, मात्र क, ड आणि स कडे जाण्यासाठी थेट मार्ग नसल्यामुळे त्या कप्प्यात शून्य दाखवले आहे. याचप्रमाणे इतर ओळींचा अर्थ आहे.

	अ	ब	क	ड	स
अ	०	१	०	०	०
ब	१	०	२	०	०
क	०	२	०	२	०
ड	०	०	२	०	२
स	०	०	०	२	०

या प्रक्रियेमुळे लक्षात येईल की मूळ भूमितीमधील आकृतीपासून पूर्णपणे भिन्न अशा अंकगणितीय किंवा बीजगणितीय स्वरूपात माहितीचं हस्तांतरण शक्य झालं. त्यावर भिन्न प्रकारे प्रक्रिया करणं आणि नवीन अर्थ काढणं शक्य आहे. नैसर्गिक किंवा मानवनिर्मित कोणत्याही वस्तू किंवा प्रक्रिया यांचा अमूर्त स्वरूपात बदल करून गणिताद्वारे त्यांचं विश्लेषण करण्यामुळेच विविध क्षेत्रांत विकास करणं शक्य झालं आहे.

रोजच्या व्यवहारात अनेक अमूर्त संकल्पनांचा वापर सहजरित्या केला जातो. उदाहरणार्थ, रस्त्यावर वाहतुकीचा सिग्नल लाल रंगाचा असेल, तर थांबणं आणि हिरवा असेल, तर पुढे जाणं हे ओघाने आलं. इथे लाल किंवा हिरवा रंग महत्त्वाचा नाही. त्याऐवजी कोणतेही दोन वेगळे रंग घेतले आणि त्यांना तसा अर्थ दिला तरी चालेल. ट्रॅफिक हवालदार वाहतूक नियंत्रण करतो तेव्हा तो कोणताही रंग वापरत नसून केवळ हाताच्या खुणेने निर्देश करतो. पण त्यामुळे कुठलाही गोंधळ होत नाही. यावरून लक्षात येईल, की अमूर्त संकल्पनांद्वारे विचार करायला आपली हरकत नाही. म्हणूनच गणितातील अमूर्त कल्पना आणि नियमांचा बागुलबुवा वाटू नये. काही वेळा गणितामधील चिन्हे आणि ग्रीक भाषेतील अक्षरं (α, θ, μ इत्यादी) यांचा वापर एक प्रकारचं गूढ निर्माण करतात. इथे लक्षात घेतलं पाहिजे की कुठली तरी चिन्हं आणि अक्षरपद्धती वापरणं गरजेचं आहे. ग्रीक भाषेतील अक्षरं वापरण्याची पद्धत रूढ झाली आहे एवढंच. 'α' ऐवजी 'अ' वापरला तरी गणितात काहीही फरक पडत नाही.

गणित हा विषय शिकवताना अमूर्त कल्पना म्हणजे काय आणि त्या का वापराव्या लागतात हे विद्यार्थ्यांना पहिल्यापासूनच समजावून सांगितलं आणि विविध उदाहरणं तसंच आकृत्यांच्या माध्यमातून समजावलं, तर गणिताबाबतचे गैरसमज आणि भीती बऱ्याच प्रमाणात दूर होईल.

✤

२

पुरस्कार गणिताचा

+× ∑ ∫

गणिताच्या प्रचंड आवाक्याबद्दल व अमूर्त स्वरूपाबद्दल आपण गेल्या भागात चर्चा केली. आपण यानंतर गणिताच्या विविध अंगांची माहिती करून घेणार आहोत. पण त्यापूर्वी या विषयासाठी देण्यात येणाऱ्या पुरस्काराबद्दल जाणून घेऊ. गणितात भरीव कामगिरी करणाऱ्या गणितज्ज्ञाला मानाचं समजण्यात येणारं फील्ड्स मेडल देण्यात येतं. कॅनडातील प्राध्यापक जॉन चार्ल्स फील्ड्स यांनी पुढाकार घेऊन हा पुरस्कार सुरू केला. नोबेल पुरस्काराएवढंच या पुरस्काराला जगभरात महत्त्व आहे.

गणितात अनेक विषयांचा समावेश होतो. या विषयांचा तपशीलवार अभ्यास करण्यापूर्वी आपण या विषयासाठी देण्यात येणाऱ्या पुरस्काराबाबत जाणून घेऊया. गणित विषयासाठी आल्फ्रेड नोबेल यांनी पारितोषिक का नाही ठेवलं याचं निश्चित कारण सापडत नाही. या विषयासाठी नसलेल्या पारितोषिकाची ही उणीव भरून काढण्यासाठी कॅनडातील प्राध्यापक जॉन चार्ल्स फील्ड्स यांनी १९३१-३२ मध्ये पुढाकार घेतला. त्यांनी इण्टरनॅशनल मॅथमेटिक्स युनियन या जागतिक पातळीवरील गणिताच्या शिखर संस्थेमार्फत नोबेल पारितोषिकाच्या तोडीचे पुरस्कार द्यावेत, असा प्रस्ताव मांडला. त्यासाठी स्वत: देणगी दिली. त्यांचा प्रस्ताव मान्य होऊन त्यांच्याच नावाने म्हणजे 'फील्ड्स मेडल' या नावाने हे पारितोषिक देण्यास सुरुवात

झाली. हे पारितोषिक नोबेल पारितोषिकाच्या बरोबरीचं मानण्यात येत असलं तरी त्याचे निकष आणि पुरस्कार-प्रदानपद्धत फारच वेगळी आहे.

फील्ड्स मेडल दर चार वर्षांनी भरणाऱ्या आंतरराष्ट्रीय गणित काँग्रेसच्या उद्घाटन समारंभात देण्यात येतं. हे पारितोषिक दोन, तीन किंवा चार गणित तज्ज्ञांना देण्यात येतं. त्यासाठी समिती दोन वर्षं आधीच नामांकनं मागवून निवडप्रक्रिया सुरू करते. हे पारितोषिक कुठल्याही विशिष्ट शोध किंवा शोधपत्राबाबत न देता एकूण गणितातील योगदानानुसार दिले जाते. ज्या वर्षी पारितोषिक स्वीकारणार, त्या वर्षीच्या १ जानेवारीस विजेत्याचं वय ४० हून कमी असायला हवं.

फील्ड्स मेडलचा मान मोठा असला, तरी त्याबरोबर देण्यात येणारी रक्कम फक्त यूएस डॉलर १३,५०० इतकीच आहे. नोबेल विजेत्यास देण्यात येणाऱ्या यूएस डॉलर १३ लाखांपेक्षा ही रक्कम फारच कमी आहे. फील्ड्स मेडलवर आर्किमिडीज या गणितज्ज्ञाचं चित्र आहे. (अधिक माहितीसाठीः www.mathunion.org)



फील्ड्स मेडलची पुढील बाजू



फील्ड्स मेडलची मागील बाजू

फील्ड्स मेडल विजेत्यांची यादी पुढे दिली आहे. या यादीवरून लक्षात येतं, की बहुतेक विजेते युरोप खंडातील किंवा अमेरिकेतील गणितज्ज्ञ आहेत. एकाही भारतीय गणितज्ज्ञाचं नाव या यादीत नसल्यामुळे खंत वाटते. भविष्यकाळात ही परिस्थिती बदलेल अशी आशा करू या.

फील्ड्स मेडलव्यतिरिक्त गणितासाठी आता इतर पारितोषिकंही इण्टरनॅशनल मॅथॅमेटिक्स युनियनतर्फे दिली जातात. ती पुढीलप्रमाणे:

रॉल्फ नेव्हालिना पारितोषिक– हे पारितोषिक दर चार वर्षांनी इन्फर्मेशन सायन्समधील गणिती अभ्यासात केलेल्या उल्लेखनीय कामगिरीबद्दल १९८२ पासून देण्यात येत आहे. इथेही वयाची अट ४० वर्षं अशी आहे.

कार्ल फ्रेड्रिक गौस पारितोषिक– हे पारितोषिक गणिताचा उपयोग अन्य कुठल्याही क्षेत्रात करण्याच्या दृष्टीने केलेल्या भरीव कामगिरीबाबत २००६ पासून देण्यात येत आहे. जपानचे कियोशी इटो यांना त्यावर्षी हे पारितोषिक देण्यात आलं.

एबेल पारितोषिक– गणितात केलेल्या उल्लेखनीय कार्यासाठी जीवनगौरव या स्वरूपाचे हे पारितोषिक आहे. सन २००३ पासून हे पारितोषिक दरवर्षी देण्यात येत आहे.

श्रीनिवास रामानुजन पारितोषिक– हे पारितोषिक विकसनशील देशातील ४५ वर्षांहून कमी वय असलेल्या गणितज्ज्ञास उल्लेखनीय संशोधनासाठी देण्यात येतं. सन २००५ पासून हे पारितोषिक देण्यास सुरुवात झाली. मारकेडो व्हियाना(ब्राझील) या पहिल्या विजेत्या असून २००६ चं पारितोषिक सुजाता रामदोराय (टाटा मूलभूत संशोधन संस्था, मुंबई, भारत) यांना मिळालं.

भारतीय गणितज्ज्ञांचं गणित, संख्याशास्त्र आणि इतर संलग्न विषयात उच्च दर्जाचं योगदान होत असलं तरी त्यात अधिक सातत्य आणि नावीन्य आणल्यास आंतरराष्ट्रीय कीर्तीची वरील पारितोषिकं मिळवणं कठीण नाही. मात्र त्यासाठी कठोर परिश्रम आणि योग्य ते प्रोत्साहन व सुविधा यांचा समन्वय झाला पाहिजे. मुख्य म्हणजे कसदार आणि उच्च दर्जाच्या संशोधनाची परंपरा कायम करणं गरजेचं आहे.

आतापर्यंत फील्ड्स मेडल मिळवलेले गणितज्ज्ञ:

वर्ष	**विजेते**	**देश**
१९३६	एल. व्ही. एलफोर्स जे. डग्लस (द्वितीय महायुद्धामुळे काही वर्ष खंड पडला)	फिनलॅण्ड अमेरिका
१९५०	एल. श्वार्ट्झ ए. सेलबर्ग	फ्रान्स नॉर्वे
१९५४	के. कोडिरा जे. पी. सेर	जपान फ्रान्स
१९५८	के. एफ. रोथ आर. थोम	अमेरिका फ्रान्स
१९६२	एल. होरमॅण्डर जे. डब्ल्यू. मिलनोर	स्वीडन अमेरिका

१९६६	एम. एफ. आटिया पी. जे. कोहेन ए. ग्रोथेण्डाइक एस. स्मेल	इंग्लंड अमेरिका फ्रान्स अमेरिका
१९७०	ए. बाकर एच. हिरोनाका एस. नोव्हिकोव्ह जे. जी. थॉमसन	इंग्लण्ड जपान रशिया अमेरिका
१९७४	इ. बोम्बारी डी. बी. ममफोर्ड	इटली अमेरिका
१९७८	पी. आर. देलिग्न सी. एल. फेफरमन जी. ए. मारग्युलिस डी. जी. क्युलेन	बेल्जियम अमेरिका रशिया अमेरिका
१९८२	ए. कोन्स डब्ल्यू. पी. थर्स्टन एस. टी. यू	फ्रान्स अमेरिका (चीन/अमेरिका)
१९८६	एस.के.डोनाल्डसन जी. फाल्टिंग्स एम. एच. फ्रीडमन	इंग्लण्ड प. जर्मनी अमेरिका
१९९०	व्ही. डीनफेल्ड व्ही. एफ.आर. जोन्स एस. मोरी इ. विटेन	अमेरिका न्यूझीलण्ड जपान अमेरिका
१९९४	जे. बोउरगेन पी. एल. लीआँस जे. सी. योकेझ इ. झेलमॅनोव	बेल्जियम फ्रान्स फ्रान्स रशिया

१९९८	आर. इ. बोरचर्ड्स डब्ल्यू. टी. गॉवर्स एम. कोंटसचिव सी. टी. मॅकमुलेन	इंग्लण्ड इंग्लण्ड रशिया अमेरिका
२००२	एल. लाफोरज व्ही. व्होइवोडस्की	फ्रान्स रशिया
२००६	ए. ओकूनकोव जी. पेरलमन (*) टी. टाग डब्ल्यू. वेरनर	रशिया रशिया ऑस्ट्रेलिया फ्रान्स

(*) याने पारितोषिक नाकारले.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्रे पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आली आहेत व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

फील्ड्स मेडलची पुढील बाजू - www.tocatch.info

फील्ड्स मेडलची मागील बाजू - www.celebrityfuzz.com

३

सौंदर्य आणि गणित

+ × ∑ ∫

गणित म्हणजे कठीण, रूक्ष विषय अशी सर्वांचीच समजूत आहे. पण वस्तुस्थिती वेगळी आहे. गणित विषय जेवढा किचकट वाटतो, तेवढाच तो सुंदरही आहे. मात्र तो नीट समजून कसा घ्यावा हे आपल्या शिक्षण-पद्धतीत शिकवलं जात नाही. त्यामुळे गणिताची ही बाजू दुर्लक्षित राहते. सौंदर्य प्रत्येकाच्या दृष्टीनुसार बदलत असलं, तरी सौंदर्याला गणिताची बैठक मिळाली की एक प्रकारची स्थिरता येते.

गणित हा विषय वाटतो तितका रूक्ष अजिबात नाही. गणिताचा व सौंदर्याचा फार घनिष्ठ संबंध आहे. या लेखात म्हणूनच, सौंदर्याचं गणित व गणिताचं सौंदर्य अशा दोन्ही पैलूंची चर्चा केली आहे.

सौंदर्याचं गणित : सौंदर्याचा अनुभव नैसर्गिक, मनुष्याधारित आणि मानवनिर्मित गोष्टींमध्ये येतो. याचं उदाहरण म्हणजेः

१) *नैसर्गिक* - पर्वत, वनं, नद्या, समुद्र, स्फटिक, फुलं, पानं, पक्षी, शंखशिंपले
२) *मनुष्याधारित* - नृत्यप्रकार, अभिनय, क्रीडाशैली, कवायत, गायन
३) *मानवनिर्मित* - शिल्प, चित्र, ग्रंथ, नाटक, कविता, वाद्यसंगीत, उपकरणं

अशा नैसर्गिक आणि मानवनिर्मित कलाकृतींच्या सौंदर्याचा आस्वाद वैयक्तिक पातळीवर वेगवेगळ्या प्रकारे घेतला जातो. त्यात पुढील घटकांचा समावेश गृहीत धरला जातोः

- भव्यता
- स्पष्टपणा
- मिलाफ
- प्रमाणशीरपणा
- सफाईदारपणा
- उत्कटता
- संतुलन
- ऐक्य/एकसंधता
- मधुरता

या सौंदर्यघटकाचं मोजमाप आणि विश्लेषण करण्यासाठी विविध प्रकारच्या गणिती पद्धती विकसित केल्या गेल्या आहेत. त्यांचा वापर करून सौंदर्य का जाणवतं तसंच निसर्गातील गोष्टींची रचना कशी केली जाते, याची कल्पना येते. याबाबत काही विभिन्न नैसर्गिक वस्तू गणितातील एका विशिष्ट संख्यारचनेशी कशा प्रकारे निगडित आहेत हे नमुना म्हणून पाहू याः

अपवाद वगळता सहसा फुलांच्या पाकळ्या तीन, पाच, आठ, १३, २१ किंवा ३४ अशा संख्येने असतात. सूर्यफुलाच्या केशरी रंगाच्या उजव्या बाजूने वाकलेल्या पाकळ्या ५५, तर डाव्या बाजूने वाकलेल्या पाकळ्या ३४ अशा म्हणजे एकूण ८९ आढळतात. तसेच ९० टक्के झुडपांच्या पानाचा आणि त्यांच्यापर्यंत पोहोचण्यासाठी खोडावर घ्याव्या लागणाऱ्या नागमोडी वळणाच्या संख्येचं गुणोत्तर १/२, १/३, २/५, ३/८, ५/१३... असंच आढळतं. या सर्व संख्या इटालियन गणितज्ज्ञ लिओनार्डो फिबोनास्सीने इसवी सन १२०२ मध्ये प्रस्तावित केलेल्या क्रमवारीनुसार आहेत. म्हणून त्याना फिबोनास्सी संख्या म्हणतात. या पुढीलप्रमाणे आहेतः

०,१,१,२,३,५,८,१३,२१,३४,५५,८९,१४४,२३३,३७७,६१०,...

ही क्रमवारी तयार करण्याचा नियम सोपा आहे. पहिले ० आणि १ हे दोन अंक घ्यायचे आणि प्रत्येक पुढील अंक त्यामागील दोन अंकाच्या बेरजेइतका घ्यायचा (१+१=२, २+१=३, ३+२=५...). निसर्गातील अनेक गोष्टी या क्रमवारीने रचलेल्या आहेत. या क्रमवारीचं आणखी एक वैशिष्ट्य म्हणजे प्रत्येक पुढील संख्येला त्यांच्या मागील संख्येने भाग दिला आणि असा क्रम बराच वेळ चालू ठेवला तर गुणोत्तराचं उत्तर १.६१८०३४ या संख्येच्या आसपास स्थिरावतं. (५/३ = १.६६६, ८/५ = १.६

१३/८ = १.६२५...). पण वरील भागाकाराचा क्रम उलटा केला म्हणजेच, मागील संख्येस पुढील संख्येने भाग दिल्यास (३/५=६, ५/८=६२५...) तर गुणोत्तराचं उत्तर ०.६१८०३४ या संख्येच्या आसपास स्थिरावतं.

१.६१८०३४ या संख्येस सोनेरी संख्या किंवा रम्य संख्या म्हटलं जातं. कारण चित्राची सौंदर्यमीमांसा करताना त्याच्या लांबी आणि उंचीचं गुणोत्तर या संख्येच्या आसपास असेल, तेव्हा ते सर्वाधिक सुंदर दिसतं अशी धारणा अनेक वर्षं होती. निसर्गातील शंखशिंपले, फळं इतकेच नव्हे, तर मानवी शरीरातील अनेक अवयव या फिबोनास्सी संख्या किंवा सोनेरी संख्येशी निगडित आहेत. उदाहरणार्थ, आपल्याला दोन हात आणि प्रत्येक हाताला पाच बोटं आहेत. प्रत्येक बोटाचे तीन भाग पडतात आणि प्रत्येक बोटामध्ये तीन सांधे आहेत. मधल्या बोटाची आणि करंगळीची लांबी यांचा अनुपात १.६१८०३४ च्या आसपास येतो. एकूणच निसर्गातील गोष्टींचं सौंदर्य आणि जास्तीतजास्त कार्यक्षमतेसाठी आवश्यक अशी संरचना हे गणितातील वरील संख्याक्रम तसंच अनेक इतर संकल्पना आणि प्रक्रियांशी निगडित असल्याचं आढळतं. सौंदर्याचा आस्वाद घेण्यास गणित अशा प्रकारे हातभार लावू शकतं.

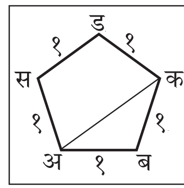
गणिताचं सौंदर्य : गणिताच्या अनेक शाखा आणि उपशाखा आहेत. या प्रत्येक शाखेचं वैशिष्ट्य आहे आणि त्यामुळे तिचं सौंदर्य वेगळंच असतं. मात्र गणितामध्ये खालील बाबींचा समावेश असल्यास ती गणिती रचना चांगली आणि योग्यतापूर्ण असं म्हटलं जातं.

- ✎ सर्वसामान्यपणा आणि व्यापकता (जनरलायझेशन)
- ✎ किमान गृहीतकांचा वापर (मिनिमम नंबर ऑफ अझम्पशन्स)
- ✎ किमान पायऱ्यांत निष्कर्षापर्यंत पोहोचणं (मिनिमम नंबर ऑफ स्टेप्स)
- ✎ एखाद्या संकल्पनेचा किंवा पद्धतीचा उपयोग गणितातील दुसऱ्या शाखेत किंवा इतर विषयांत करून दाखवणं.
- ✎ एखादा प्रश्न गणिती पद्धतीने सोडवता येणार नाही असं सिद्ध करणं (नॉन एक्झिस्टन्स ऑफ अल्गोरिदम)

यांपैकी काही बाबी स्पष्ट करण्यासाठी आपण एखादं उदाहरण घेऊया. वरील सोनेरी संख्या (१.६१८०३४) प्राप्त करण्यासाठी फिबोनास्सीने शोधून काढलेल्या संख्याक्रमाचा म्हणजे ०,१,१,२,३,५... चा उपयोग केला होता. ही सोनेरी संख्या इतर काही मार्गाने मिळवता येईल का, असा प्रश्न गणिताच्या व्यापकतेच्या दृष्टीने पडतो. याचं उत्तर होय असं आहे, हे खालील विविध मार्गांवरून लक्षात येईलः

१) कुठलेही दोन अंक स्वैरपणे निवडा आणि त्यापुढील अंक तयार करण्यासाठी फिबोनास्सीचा नियम वापरा. नंतर त्याचप्रमाणे पुढील अंकास मागील अंकाने भाग देणं सुरू ठेवल्यास ते गुणोत्तर १.६१८०३४ संख्येच्या आसपास येईल. उदाहरणार्थ, आपण सुरुवातीचे अंक १ आणि ४ निवडू या. यावर फिबोनास्सीच्या नियमानुसार प्रक्रिया केल्यास खालील क्रमवारी प्राप्त होईलः १,४,५,९,१४,२३,३७,६०... व त्यांचं गुणोत्तर ५/४ = १.२५०, ९/५ = १.८०... ६०/३७ = १.६२२... असं मिळेल आणि शेवटी सोनेरी अंकाशी स्थिरावेल.

२) एक समभुजा असलेली पंचकोनी आकृती तयार करा (अबकडस), अब ही भुजा १ सेमी लांबीची आहे असं माना, तर या पंचकोनी आकृतीमध्ये 'अक' किंवा तत्सम रेषेची लांबी त्रिकोणमितीच्या सूत्रानुसार, २cos (३६°) = १.६१८०३४ अशी प्राप्त होते.



३) बीजगणितातील समीकरण, *अ*^{2} *- अ - १ = ०* हे सोडवल्यास 'अ'चं मूल्य खालीलप्रमाणे मिळतं.

$$अ = \frac{१ + \sqrt{५}}{२} = १.६१८०३४ \quad \text{किंवा} \quad अ = \frac{१ - \sqrt{५}}{२} = -०.६२८०३४$$

या व्यतिरिक्त आणखी काही पद्धतीने सोनेरी अंकापर्यंत जाता येतं. वरील उदाहरणात संख्या सिद्धात (नंबर थिअरि), त्रिकोणमिती आणि भूमिती (ट्रिग्नोमेट्री ॲण्ड जॉमेट्री) आणि बीजगणित (अल्जेब्रा) अशा गणितातील विविध शाखांचा वापर करून सोनेरी संख्येचा अभ्यास करता येतो हे लक्षात येतं. यामुळे व्यापकता, किमान गृहीतकांचा वापर आणि कमीत कमी प्रक्रियांचा वापर या गणिताच्या सौंदर्याच्या व्याख्या विशद होतात. तसंच भौतिकशास्त्र, अर्थशास्त्र, संगणकशास्त्र, भूगोल आणि इतर अनेक विषयांत गणिती संकल्पनांचा वापर त्यांची भरीव उपयुक्तता दर्शवते.

तसंच एखाद्या प्रश्नासाठी गणिती पद्धती अचूक उत्तर देण्यास असमर्थ आहे हे सिद्ध करणं हे एका वेगळ्याच सौंदर्याची कल्पना देते. असा निष्कर्ष कुठल्या मार्गाने जाऊ नये याचं निर्देशन करतो. अशा प्रश्नांसाठी अंदाजे जवळपास उत्तर देणारी पद्धती (ॲप्रॉक्सिमेशन मेथड) किंवा चुकतमाकत (ट्रायल ॲण्ड एरर) किंवा उद्रामी पद्धती (ह्युरिस्टिक्स मेथड) यांचा विकास करणं भाग पडतं आणि ते एक आव्हानच असते.

खालील समीकरण सोडवण्यास, म्हणजेच 'क्ष'चं मूल्य प्राप्त करण्यास, $अ_{०} क्ष^{न} + अ_{१} क्ष^{न-१} + ---- + अ_{न} = ०$ जर 'न'चं मूल्य चारपेक्षा जास्त असेल, तर कोणतीही गणिती औपचारिक पद्धत उपलब्ध नाही ($अ_{०}$, $अ_{१}$, ..., $अ_{न}$ हे स्थिरांक आहेत), असा निकर्ष गणिताची एक वेगळीच बाजू दाखवतो. अशा स्थितीत वरील अंदाज पद्धतींचा वापर उत्तर काढण्यास करावा याचा निर्देश देतो. म्हणूनच अशा निष्कर्षांना गणितामध्ये असाधारण महत्त्व दिलं जातं.

यावरून लक्षात येईल, की सौंदर्याचा आस्वाद घेण्यासाठी गणिताचा वापर करता येतो. तसेच गणिताचीपण अनेक सौंदर्यस्थळे आहेत. गरज आहे ती विशेष दृष्टिकोन विकसित करण्याची आणि तसं शिक्षण देण्याची.

✤

४

गणिताचा वाढता पसारा

+× ∑ ∫

गणित या विषयाचा विविधपूर्ण उपयोग समजून घेण्यासाठी गणिताची व्याप्ती कितपर्यंत पसरली आहे, ते जाणून घ्यायला हवं. गणिताचा वापर गेली कित्येक शतकं होत आहे. मानवजात विकसित होण्यास गणिताची ही प्रगती आधारभूत ठरली आहे. आज वापरण्यात येणाऱ्या विविध टेक्नॉलॉजी, सायन्स अशा अनेक विषयांचा विकास करण्यासाठी, संशोधन करण्यासाठी गणिताचा विस्तृत वापर केला जातो.

संशोधन तसंच विविध विषयांतील गणिताच्या वापरामुळे गणिताचं क्षेत्र प्रचंड वेगाने वाढत आहे. यामुळे गणिताच्या नवीन शाखा-उपशाखांचा विस्तार होत आहे. याचबरोबर गणितातील पारंपरिक शाखेतील ज्ञानातही भर घातली जात आहे. शाळा आणि कॉलेज पातळीवर सामान्यपणे गणितातील पुढील शाखांचा परिचय होतो:

- अंकगणित
- भूमिती
- बीजगणित
- त्रिकोणमिती
- कॅलक्युलस (Differential & Integral)

- हायड्रोस्टॅटिक्स
- हायड्रोडायनॅमिक्स
- संख्याशास्त्र
- मॅकेनिक्स
- न्यूमरिकल ॲनालिसिस
- रिअल आणि कॉम्प्लेक्स ॲनालिसिस

याव्यतिरिक्त अनेक गणिती शाखा आणि उपशाखा विकसित झाल्या आहेत. यातील संशोधनाचा उपयोग विविध टेक्नॉलॉजी आणि इतर विषयांच्या विकासात होतो. गणिताचा पसारा किती वाढला आहे, हे खालील आकडेवारीवरून लक्षात येईल.

इसवी सन १८६८ मध्ये *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* या जर्नलने तत्कालीन गणित विषयात संशोधन, मुद्रित लेख आणि पुस्तकांचा आधार घेऊन गणिताचं वर्गीकरण प्रसिद्ध केलं होतं. त्यानुसार गणिताच्या १२ मुख्य शाखा मांडल्या होत्या. त्यांच्या ३८ उपशाखाही वर्गीकृत केल्या होत्या. सन २००० मध्ये *मॅथेमॅटिकल रीव्ह्यूज* आणि *झेण्ट्रलबाट मॅथ* या दोन आंतरराष्ट्रीय ॲब्स्ट्रॅक्टिंग जर्नल्सनी गणिताच्या शाखा आणि उपशाखा यांचं जे वर्गीकरण केलं, त्याप्रमाणे ६३ शाखा व ४५०० हून अधिक उपशाखा मांडल्या आहेत. यावरून मागील १३२ वर्षांच्या काळामध्ये गणितातील प्रगतीचा अंदाज येतो. सध्या १५०० हून अधिक जर्नल्स गणिताशी निगडित लेख आणि इतर सामुग्री प्रकाशित करतात. त्यामुळे गणित असंच विकसित होईल का, असा प्रश्न साहजिकच पडतो. जोपर्यंत मानवाची निसर्गरहस्यं उकलण्याची जिज्ञासा तसंच नैसर्गिक आणि मानवनिर्मित समस्या संपत नाहीत तोपर्यंत या प्रश्नाचं उत्तर 'होय' असंच राहील. कारण गणित हे मानवाच्या बहुतेक सर्व व्यवहारांशी संबंधित आहे.

तसंच गणित हे सहसा काळाच्या पुढेच राहत आलं आहे. म्हणजेच, गणिती संशोधनातून प्राप्त झालेल्या अमूर्त संकल्पना आणि प्रक्रिया यांचा वापर अन्य विषयात अनेक वर्षांनंतर झालेला आढळतो. अजूनही असे अनेक गणिती निष्कर्ष उपयोगितेच्या शोधात आहेत. आइनस्टाइनला सापेक्षता सिद्धांत (थिअरि ऑफ रिलेटिवीटी) प्रतिपादित करण्यासाठी आवश्यक ते गणिती निष्कर्ष आणि गणिती बैठक ४० ते ५० वर्षं आधीच रिमान या गणितज्ज्ञाने मांडली होती. मात्र, आइनस्टाइन यांच्या क्षमतेचा भौतिकशास्त्रज्ञ नसल्यामुळे त्या गणिती विकासाचा लगेच फायदा घेतला गेला नाही. असं म्हटलं जातं,

की निसर्गाच्या मूलभूत संरचनेचं गूढ उकलण्यासाठी अलीकडच्या काळात प्रस्तावित केलेली 'स्ट्रिंग थिअरि' हिच्या विकासाचा मार्ग योग्य अशी गणिताची पार्श्वभूमी तयार नसल्यामुळे कुंठीत झाला आहे. यावरून गणिताच्या विकासाचं अनन्यसाधारण महत्त्व लक्षात येईल. आधुनिक संगणकाचा उदय इलेक्ट्रॉनिक्स तंत्रज्ञान विकसित होईपर्यंत झाला नाही. मात्र त्याच्यासाठी लागणारे सर्व गणिती नियम आणि प्रक्रियांचा विकास कित्येक दशकं आधीच झाला होता.

मानवी वाद-विवाद, कलह, तंटे, झगडे आणि युद्ध ही गणिताच्या विकासाला कारणीभूत ठरली असल्याचं इतिहास सांगतो. अगदी प्राथमिक अवस्थेत शिकार करताना दगड किंवा तत्सम अस्त्र फेकताना ते जास्तीतजास्त अंतरापर्यंत पोहोचेल, याचं साधारण गणित मानव करत असे. तसंच मिळवलेल्या शिकारीचं किंवा इतर खाद्यवस्तूंचं वाटप करताना गणिताचाच आधार घ्यावा लागत असे. आर्किमिडीज या अती उच्च दर्जाच्या गणितज्ज्ञाची भरीव मदत विविध भेदक अस्त्रं निर्माण करण्यात झालेली आढळते (इसवी सन पूर्व २२५ हा काळ). अलीकडचं उदाहरण म्हणजे दुसऱ्या महायुद्धात उदयास आलेले प्रवर्तन संशोधन (ऑपरेशन्स रिसर्च) ही गणिताची नवीन शाखा. या गणिती विकासाचा फायदा नंतर इतर नागरिक आणि सामाजिक समस्यांसाठी होणं हे गरजेचं ठरतं.

वरील उदाहरणावरून युद्धामुळेच गणिताच्या विकासाला गती मिळते, असा निष्कर्ष काढला जाऊ नये. खरं म्हटलं तर गणित आणि सायन्स यांना चालना भौतिक किंवा इतर व्यावहारिक बाबीवरून मिळत असते, पण सैनिकी संस्थांचं लक्ष या विषयांकडे सर्वप्रथम जातं. तसंच अशा संशोधनाला मुबलक प्रमाणात आर्थिक साहाय्यसुद्धा प्राप्त होतं. त्यामुळे शिक्षकी व्यवसाय सोडला, तर सर्वात जास्त संख्येने गणितज्ज्ञ हे सैनिकी प्रतिष्ठानात काम करताना आढळतात, भारतातही !

खगोलशास्त्र, अंतराळशास्त्र, संगणकशास्त्र, भौतिकशास्त्र यांचा गणिताची घनिष्ठ संबंध आहे. या विषयातील विकासासाठी गणिताचा विकास सातत्याने आवश्यक ठरतो. सामाजिक शास्त्रातील आधुनिक काळातील संशोधन गणितावर बऱ्याच प्रमाणात अवलंबून आहे. याचं उल्लेखनीय उदाहरण म्हणजे अर्थशास्त्र (इकॉनॉमिक्स). याची एक शाखा गणिताशी इतकी निगडित आहे, की तिचं नावच इकोनोमेट्रिक्स असं ठेवण्यात आलं आहे. त्याचप्रमाणे गतिमान होत गेलेल्या वित्तीय प्रक्रियांचा मागोवा घेणं आणि

जोखमीचं अनुमान लावणं यासाठी विशिष्ट प्रकारची फायनान्शिअल ॲण्ड रिस्क ॲनालिसिस मॉडेल्स गणित आणि सांख्यिकीच्या (स्टॅटिस्टिक्स) मदतीने विकसित करण्यावर भर दिला जातो. ही मॉडेल्स आता वित्तीय उलाढालीचं केंद्रबिंदू बनत आहेत.

काळ, काम आणि वेग यांच्याशी निगडित विविध गणितं पूर्वापार आपल्या शालेय आणि कॉलेज गणित अभ्यासक्रमाचा भाग होती. आधुनिक संगणकावर आधारित प्रणालीद्वारे अतिजलद गतीने धावणाऱ्या आणि बदलणाऱ्या या युगात नवीन प्रकारची गणितं सोडवणं भाग पडत आहे. तसंच जागतिकीकरणामुळे कोणत्याही प्रक्रिया किंवा समस्येची व्याप्ती आणि कठीणपणा गहन होत आहे.

त्यांचा सामना करण्यासाठी गणिताची साथ महत्त्वाची आहे. उदाहरणार्थ, 'कॉम्प्लेक्सिटी थिअरि' या उपशाखेचा विकास अशा प्रश्नांचा अभ्यास करण्यासाठी अलीकडच्या काळात केला गेला आहे. एकूणच मानवजातीच्या अस्तित्वासाठी आणि स्वप्नं पूर्ण करण्यासाठी गणिताचा विस्तार होत राहील, यात शंका नाही.

✤

५

गणितातली औपचारिकता

+×∑∫

दैनंदिन व्यवहारात आपण गणिताचा वापर करतो. तरीही गणित म्हणजे मुलतः काय याचा आपण विचार करत नाही. गणितीप्रक्रियांच्या आधारे काढलेलं उत्तर बरोबर आणि सर्वमान्य असणार अशी खात्री असते. याचं कारण गणिताचा पाया हा तर्कशास्त्राशी निगडित आहे. गणितातील सर्व पद्धती आणि संकल्पना सुसंगतपणे गुंफलेल्या असतात. म्हणजेच गणिताला एका औपचारिक चौकटीत बसवणं शक्य आहे आणि ही चौकट पूर्णपणे अभेद्य आहे असा समज असतो.

दैनंदिन व्यवहारात गणिताचा वापर करताना, ऑफिसमध्ये आकडेमोड करताना आणि संगणकावर काम करताना गणिताचा कोणत्या ना कोणत्या पद्धतीने वापर होतो. तरीही गणित म्हणजे काय हा विचार आपण फारसा करत नाही. याची तशी फारशी गरजही भासत नाही. पण त्याच वेळेस गणिती-प्रक्रियेच्या आधारे काढलेलं उत्तर बरोबर आणि सर्वमान्य असणार अशी आपल्याला खात्री असते.

हा ठाम विश्वास असण्याचं कारण म्हणजे गणिताचा पाया हा तर्कशास्त्राशी (लॉजिक) निगडित आहे. गणितातील सर्व पद्धती आणि संकल्पना सुसंगतपणे गुंफलेल्या आहेत. म्हणजेच गणिताला एका ठाम व औपचारिक चौकटीत बसवणं शक्य आहे असं मानलं जातं.

या विषयाची मांडणी अशा औपचारिक पद्धतीने करण्यास Formalization म्हणतात. या प्रकारे गणिताची उभारणी करण्याचे अनेक प्रयत्न झाले आहेत. या पद्धतीचे मुख्य टप्पे पुढीलप्रमाणे आहेत :

- काही किमान गृहितकं (Axioms or Postulates) स्वयंपूर्ण आणि बरोबर आहेत हे मानणं.
- त्यांच्यावर प्रक्रिया करण्याचे सुस्पष्ट नियम तयार करणं.
- अशा प्रक्रियांद्वारे मिळालेल्या निष्कर्षांची सुसंगती (Consistency) तपासणं आणि काही त्रुटी आढळल्यास गृहितकं किंवा पद्धतीत सुधारणा करणं.

इसवीसन पूर्व ३०० याकाळात युक्लिड या ग्रीक गणितज्ज्ञाने भूमितीची रचना याच पद्धतीने केली. थोडक्यात म्हणजे त्याने बिंदू, रेषा, त्रिभुज आदी संकल्पनांची स्वयंसिद्ध अशी व्याख्या केली आणि नंतर त्यांचे परस्परसंबंध प्रस्थापित करणं आणि त्यावर प्रक्रिया करण्यासाठी नियम तयार केले. त्यांचा वापर करून संपूर्ण भूमिती प्रमेय स्वरूपात विकसित करण्यात आली. त्यातील प्रत्येक प्रमेय सुसंगत आहे, असं सिद्ध करून दाखवता येतं.

याच पद्धतीचा वापर १९व्या शतकाच्या अंतिम काळात पेआनो या गणितज्ज्ञाने स्वाभाविक संख्येची मालिका (Natural Number Series) निर्माण करण्यासाठी वापरली. त्याने पुढील पाच गृहितकांद्वारे संपूर्ण संख्या-रचनेचा पाया रचला.

- '०' ही संख्या आहे.
- प्रत्येक संख्येचा अनुचर (Successor) ही सुद्धा संख्याच असते.
- कोणत्याही दोन भिन्न संख्यांची अनुचर एकच संख्या नसते.
- '०' ही संख्या कोणत्याही संख्येची अनुचर नसते.
- एखादा गुणधर्म (Property) '०' जवळ असेल. तसंच इतर कोणा एका संख्येजवळ असता तिच्या अनुचराजवळही असेल, तर तो गुणधर्म प्रत्येक संख्येजवळ असतो.

यांपैकी शेवटचं गृहीतक गणिती विगमन म्हणजेच Mathematical Induction ही प्रक्रिया स्पष्ट करते. तिचा सतत वापर करून स्वाभाविक संख्यांची संहिता (System) तयार करता येते.

संख्यारचनेच्या उपरोक्त गृहितकं आणि प्रक्रियेत आवश्यक ती वाढ करून परिमेय संख्या (Rational Numbers) आणि वास्तव संख्या (Real Numbers) यांच्या मालिका तयार करण्यात काही अडचण येत नाही.

या विशिष्ट औपचारिक पद्धतीच्या यशामुळे संपूर्ण गणित हे औपचारिक भाषेमध्ये (Formal Language) मांडून गणिताची सर्व पुस्तकं याच भाषेत लिहिली जावीत, असा मतप्रवाह पुढे आला. या प्रयत्नांचा शिरोमणी म्हणजे १९१० मध्ये केम्ब्रिज युनिव्हर्सिटी प्रेसने प्रसिद्ध केलेला बर्ट्रण्ड रसेल आणि आल्फ्रेड नॉर्थ व्हाइटहेड यांचा जगप्रसिद्ध *'प्रिन्सिपियम मॅथॅमॅटिका'* हा ग्रंथ. या सर्व विकासावरून डाव्हिड हिल्बर्ट या जर्मन गणितज्ज्ञाने तर्कशास्त्र आणि औपचारिक पद्धती वापरून कोणत्याही गणिती संहितेची सत्यता आणि सुसंगती तपासता येईल, असं प्रतिपादित केलं आणि त्याप्रमाणे असा कार्यक्रम हाती घेण्यात यावा, असं पॅरिस इथे १९०० मध्ये भरलेल्या आंतरराष्ट्रीय मॅथॅमॅटिक्स काँग्रेसमध्ये सुचवण्यात आलं.

पण प्रत्यक्षात असं झालं का ? आपली गणिताची सर्व पाठ्यपुस्तकं आणि इतर पुस्तकं अशा औपचारिक भाषेत लिहिली गेली का, याचं उत्तर 'नाही' असं आहे. याला दोन कारणं आहेत. पहिलं म्हणजे औपचारिक भाषा ही आपल्या नैसर्गिक भाषेपेक्षा खूपच रूक्ष असते. क्लिष्ट, चिन्हांनी ओतप्रोत आणि संक्षिप्तपणावर भर देणारी अशी ही भाषा असते. या सर्व बाबी मनुष्याच्या स्वाभाविक भाषागुणधर्मपेक्षा बऱ्याच प्रमाणात वेगळ्या आहेत. म्हणून गणिताचं औपचारिक भाषेत रूपांतर करणं शक्य असलं तरीही, बहुतांश पुस्तकं या भाषेचा उपयोग मर्यादित स्वरूपात करतात.

दुसरं कारण तांत्रिक आहे. कर्ट गोदेल या गणितज्ज्ञाने १९३१ मध्ये असं सिद्ध केलं की, कोणतीही गणिती संहिता संपूर्ण किंवा सुसंगती (Complete or Consistent) यांपैकी एकाच बाबतीत परिपूर्ण असू शकते. याला Godel's Incompleteness Theorem म्हटलं जातं. या निष्कर्षामुळे गणिताला औपचारिकतेच्या चौकटीतच बंदिस्त ठेवण्याच्या कार्यक्रमाला एक प्रकारे खीळ बसली.

याचा अर्थ असा नव्हे, की औपचारिक भाषेचा गणित आणि त्याच्या वापरासाठी काहीच उपयोग नाही. मनुष्यासाठी नाही, पण संगणकासाठी ही

भाषा फारच उपयोगी आहे. संगणकाला ‘आज्ञा’ देताना सुस्पष्टता, सुसंगतपणा असायला हवा. अन्यथा संगणक व्यवस्थितपणे काम करू शकणार नाही. म्हणूनच कम्प्युटरची भाषा (Computer Codes and Languages) प्रमाणभूत स्वरूपात (Standardized form) असणं आवश्यक आहे. या विविध भाषा वापरण्यासाठी आपल्याला त्यांचा अभ्यास करायला हवा. एका अर्थाने आपण गणिताचा उपयोग औपचारिक भाषेद्वारा करण्यास बाध्य होतो.

गणिताकडे जेव्हा औपचारिक संहितेच्या दृष्टीने आपण बघतो तेव्हा गणिताचा प्रत्यक्ष कुठल्याही भौतिक वस्तुशी संबंध नसतो. याचं कारण गृहितकं कोणत्याही प्रकारे रचली जाऊ शकतात आणि कोणत्याही नावाने संबोधली, तरी फरक पडत नाही. ही व्यवस्था गणिती पद्धतींचा विकास आणि कम्प्युटरचा अचूक उपयोग करण्यासाठी आदर्श आहे.

प्रत्यक्षात गणित हे माणसाचा अविभाज्य अंग आहे आणि त्यामुळे गणिती संकल्पना आणि प्रक्रियांना आपल्याला जाणवेल आणि पटेल असा अर्थ असतो. इतर जाणिवांपेक्षा गणिती अनुभव वेगळा असतो, कारण त्याला तर्कशास्त्राची पार्श्वभूमी असते आणि त्यामुळे सर्वमान्य उत्तरं गणिती प्रक्रियेतून मिळतात. म्हणूनच गणिताकडे औपचारिकतेच्या पुढे जाऊन बघणं योग्य ठरेल.

✤

६

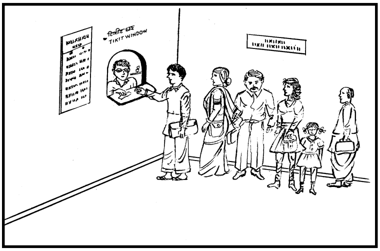
रांगेचं गणित

+× ∑ ∫

रांगेचा आणि गणिताचा संबंध काय, असा विचार कोणी करतं का ? सहसा नाही. पण रांग आणि गणिताचा खूप जवळचा संबंध आहे. तिकीट काढण्यापासून उपभोक्त्यांना सेवा पुरवण्यापर्यंतच्या कामात गणिताचाच आधार घ्यावा लागतो. रांगेचं गणित मांडणं हे मॅनेजमेण्ट सायन्सचा महत्त्वाचा भाग आहे. हा अभ्यास करण्यासाठी 'क्युईंग थिअरि' किंवा 'वेटिंग लाइन मॉडेल्स' या गणित आणि स्टॅटिस्टिक्सवर आधारित उपशाखेचा विकास झाला आणि ही उपशाखा ऑपरेशन्स रिसर्च विषयाचा अविभाज्य भाग बनली.

रेल्वेचं तिकीट काढायचं असो किंवा डॉक्टरकडून चेकअप करून घेणं असो, आपल्याला बहुतेक वेळा रांगेत उभं राहावं लागतं. रांग फक्त माणसांचीच असते असं नाही, इतरही अनेक रांगा असतात. उदाहणार्थ, ट्रॅफिक सिग्नल जेव्हा लाल असतो, तेव्हा त्या रस्त्यावर वाहनांची रांग लागलेली असते. काही वेळा विमान एअरपोर्टजवळ घिरट्या घालताना दिसतं, तेव्हा ते उतरणाऱ्या विमानांच्या रांगेत असतं. मात्र ती रांग एकदम दिसत किंवा लक्षात येत नाही. अशा अनेक भौतिक स्वरूपात अदृश्य असणाऱ्या पण तरीही प्रभाव जाणवणाऱ्या रांगा आपल्या आजुबाजूला असतात. 'आप कतार मे हैं' हे वाक्य तर फोनवर आपण बऱ्याचदा ऐकलेलं आहे. फोन करतानाही

आपण रांगेत असतो. एखादा प्रिण्टर अनेक कम्प्युटर्सना जोडला असेल, तर आपण छापण्यासाठी पाठवलेला मजकूर प्रिण्ट व्हायला वेळ लागतो. त्या वेळीही आपण रांगेत उभे असतो, पण वेगळ्या प्रकारच्या.



साहजिकच जशा रांगा वाढू लागतात, तसतसं लोकांची वाट पाहण्याची वेळ वाढत जाते. अशा वेळेस वाट पाहणाऱ्यांना अतिरिक्त सुविधा-साधने व अनेक वेळा सुविधा देणाऱ्या कर्मचाऱ्यांची संख्या वाढवावी लागते. पण ही वाढ खर्चही वाढवते. आवश्यकतेपेक्षा जास्त केलेल्या वाढीमुळे खर्च किंवा सुविधा वाया जाण्याची शक्यताही असते. यामुळेच रांगेचं गणित मांडणं हे व्यवस्थापन म्हणजेच मॅनेजमेण्ट सायन्सचा एक महत्त्वाचा भाग आहे. असा अभ्यास करण्यासाठी 'क्युईंग थिअरि' किंवा 'वेटिंग लाइन मॉडेल्स' अशा गणित आणि स्टॅटिस्टिक्सवर आधारित उपशाखेचा विकास झाला आणि ही उपशाखा ऑपरेशन्स रिसर्च या विषयाचा अविभाज्य भाग बनली आहे.

रांगेचं गणित मांडताना पुढील गोष्टींचा अभ्यास महत्त्वाचा ठरतो :

इनपुट प्रक्रिया/पद्धती– रांगेचा आकार, एका वेळी एक किंवा अधिक कस्टमर्सना सर्विस देणं (single/bulk/batches), गिऱ्हाईक येण्याची शक्यता आणि रांगेचा आकार बघून कस्टमर्सनी रांगेत थांबायचं की नाही, याबाबत निर्णय घेण्याची शक्यता.

रांगेची शिस्त– प्रथम येणाऱ्यास पहिल्यांदा किंवा शेवटी आलेल्याला पहिल्यांदा सर्विस (first in, first out (FIFO) or last in, first out (LIFO)) किंवा सर्विस देण्याचा क्रम सोडतीने (selection for service in random order) ठरवणं किंवा अग्रक्रम ठरवणं (deciding priority for service) अशापैकी एक प्रक्रिया ठरवणं.

सेवा पुरवठा पद्धती– एक खिडकी किंवा अनेक सेवा खिडक्या आणि त्यांच्या विविध प्रकारच्या व्यवस्था (in series or parallel) आणि सेवा प्रदान करणाऱ्या व्यवस्थेचं रूप.

सेवा पुरवण्याची क्षमता– सेवा देणाऱ्या एकूण सिस्टिमची क्षमता म्हणजेच जागा, वेळ आणि साधनं यांची उपलब्धता.

वरील बाबींवरून लक्षात येईल, की रांगेचं स्वरूप अनेक घटकांवर अवलंबून असतं. त्याप्रमाणे तिचं गणिती रूप बदलू शकतं. प्रत्यक्षात मात्र हे गणित मांडणं अनेकदा सोपं जातं. कारण सर्विस देण्याची पद्धत आणि पुरवठा क्षमता यात वारंवार बदल करणं शक्य नसतं. तसंच कस्टमर येणं आणि त्यांना सर्विस देणं या प्रक्रिया सहसा स्टॅटिस्टिक्समधील काही मूलभूत विनिमय नियमांनुसार घडणाऱ्या असतात. उदाहणार्थ, गिऱ्हाईक रांगेत येणं हे पॉयसां डिस्ट्रिब्युशन, तर सर्विस पद्धती एक्सपोनेन्शियल डिस्ट्रिब्युशन या सांख्यिकी नियमानुसार घडणाऱ्या आढळतात. त्यामुळे रांगेचं गणित मांडणं अणि प्रक्रिया करणं सुलभ ठरतं. त्यानुसार रांगेबाबत खालील निष्कर्ष काढता येतात.

- रांगेत प्रतीक्षा करणाऱ्या व्यक्तीची अपेक्षित संख्या
- रांगेत आणि सर्विस घेत असलेले अशा एकूण सिस्टिममध्ये असलेल्या व्यक्तींची अपेक्षित संख्या
- रांगेत प्रतीक्षा करण्याचा प्रत्येक व्यक्तीसाठी सरासरी वेळ
- एकूण सिस्टिममध्ये (प्रतीक्षा आणि सर्विस मिळून) प्रत्येक व्यक्तीसाठी लागणारा सरासरी वेळ
- सर्विस देणारे कर्मचारी आणि साधनांचा वापर याचं मोजमाप (५० टक्के, ७० टक्के इत्यादी)

वरील माहिती धोरणात्मक तसंच तातडीचे निर्णय घेण्यास महत्त्वपूर्ण ठरते. उदाहरणार्थ, सर्विस देणाऱ्या सुविधा किंवा खिडक्या (तसंच कर्मचारी) केव्हा आणि कुठे वाढवाव्या किंवा कमी कराव्यात असे निर्णय बँक मॅनेजर, रेल्वे किंवा सिनेमा तिकीट-विक्रेते आणि मॉल्स, एअरपोर्ट मॅनेजर्स यांना अनेकांना वेळोवेळी घ्यावे लागतात. तसंच सुविधा वाढवूनही गर्दी किंवा रांगेशी उपरोक्त घटक (लांबी आणि वाट पाहण्याची वेळ) वाजवीपेक्षा मोठेच राहतात असं आढळलं, तर एकूण सर्विस सिस्टिमचा फेरविचार करणं योग्य ठरतं. सर्विस इतर कोणत्या पद्धतीने कार्यक्षम आणि किफायतशीरपणे देता येईल, याचा विचार केला जातो. सध्याच्या प्रक्रियेत आमूलाग्र बदल, तर काही बाबतीत संपूर्णपणे नवीन सेवा प्रक्रिया उभारण्यात येते. बँकांची एटीएम सेवा, उपनगरीय गाड्यांसाठी कूपन्स वापराची सोय तसंच कम्प्युटरद्वारे घरबसल्या छापून घेता येईल अशी विमानसेवा कंपन्यांची तिकीट विक्रीची सुविधा ही याचीच उदाहरणं. अशा नवीन प्रकारच्या सेवा सुरू करण्याआधी रांगेचा अभ्यास आणि त्याचं गणिती विश्लेषण मोठ्या प्रमाणावर केलं गेलं आहे.

डेन्मार्कच्या ए. के. एरलँग यांनी १९०९ मध्ये त्या वेळी अस्तित्वात असलेल्या टेलिफोन एक्सचेंजमध्ये निर्माण होणाऱ्या कॉल्सच्या रांगेचा अभ्यास करून प्रसिद्ध केलेला शोध लेख हा क्युईंग थिअरिची सुरुवात मानली जाते. या विषयावर भरपूर प्रमाणात पुस्तकं आणि वेबसाइट्स उपलब्ध आहेत. *द जर्नल ऑफ क्युईंग सिस्टिम* असं एक आंतरराष्ट्रीय जर्नल १९८६ पासून प्रसिद्ध होत आहे. त्याचे पहिले संपादक भारतीय मूळचे प्राध्यापक एन. यू. प्रभू होते. याशिवाय गणित, स्टॅटिस्टिक्स आणि ऑपरेशन्स रिसर्च या विषयांतील जर्नल्समध्ये क्युईंग थिअरिवरील लेख समाविष्ट असतात.

क्युईंग थिअरिचा उपयोग सातत्याने होत आहे. मशीन रिपेअर्सच्या दुकानात एक अतिरिक्त नोकर नेमायचा असो किंवा सबंध रेल्वे मार्शलिंग यार्डची पुनर्रचना करावयाची असो, या विषयातील नियम आणि मॉडेल्सचा वापर उपयोगी ठरतो. अलीकडच्या काळात कॉल सेण्टर्सची निर्मिती, बहुउद्देशीय हॉस्पिटल्सची संरचना आणि कम्प्युटरच्या आधारे चालवली जाणारी संदेश सेवाप्रणाली (mailing system) यांचं प्लानिंग आणि मॅनेजमेण्ट यात क्युईंग थिअरिचा मोठा सहभाग असतो. आता अशी मॉडेल्स वापरण्यासाठी अनेक सॉफ्टवेअर पॅकेजेसही उपलब्ध आहेत.

क्युईंग थिअरिचा वापर सतत अपेक्षित आहे आणि त्यामुळे या विषयात प्रावीण्य मिळवल्यास नोकरीच्या अनेक संधी (कन्सल्टिंग कंपन्यांत) तसंच स्वत:ची कन्सल्टिंग फर्म उघडण्यात मदत मिळू शकते. गणित आणि विशेषत: स्टॅटिस्टिक्सची आवड असणाऱ्यांनी या विषयाच्या अभ्यासाकडे विशेष लक्ष द्यावं.

✤

७

साठवणीचं गणित

+ × ∑ ∫

कोणत्याही बिझनेसमध्ये मागणी आणि पुरवठ्याचं गणित सांभाळताना साठ्याचं (स्टोअरेज) व्यवस्थापन करावं लागतं. यावरच उलाढालीचा नफा आणि तोटा अवलंबून असतो. व्यवहारपातळीवर या साठ्याचं गणित मांडणं आणि ते सोडवण्यासाठी इन्व्हेण्टरी कण्ट्रोल शाखेचा उदय झाला. केवळ उत्पादनच नाही, तर सर्विस प्लानिंग आणि मॅनपॉवर मॅनेजमेण्टसाठीही ही पद्धती उपयुक्त ठरते.

भांडवल, वस्तू किंवा मनुष्यबळ असू दे, मागणी आणि पुरवठा यामध्ये फरक पडला की त्याचे विविध परिणाम दिसतात. यातील मुख्य म्हणजे मागणीचं प्रमाण पुरवठ्यापेक्षा वाढलं, तर त्या वस्तूच्या किमती वाढतात. पण मागणी कमी आणि पुरवठा जास्त असेल, तर वस्तूंच्या किमती कमी होतात. हा प्रश्न अगदी लहान उद्योजकांपासून मोठ्या संस्थांनाही सतावत असतो. या समस्येचं एक उत्तर म्हणजे वस्तूंचा साठा किंवा साठवण करणं.

पण साठा किती प्रमाणात करावा, हे प्रत्यक्षात महत्त्वाचं आहे. याचं कारण म्हणजे मालाची साठवण करताना प्रमाणबद्ध जागा (वखार किंवा गोदाम), सुरक्षा यंत्रणा (चोरी/आगीपासून बचाव) आणि भांडवलाची गुंतवणूक या प्रकारच्या अनेक गोष्टींचा विचार करावा लागतो. माल नाशवंत स्वरूपाचा असेल, तर त्याच्या साठ्यासाठी विशिष्ट प्रकारची व्यवस्था (उदा. वातानुकूलित गोदामे) खर्चिक असते. पण साठा नसेल आणि मागणी आली, तर कस्टमर्सना नकार द्यावा लागतो आणि ते कोणत्याही धंद्याला नुकसानदायक ठरू शकतं. थोडक्यात, साठा असणं किंवा नसणं, या दोन्ही गोष्टी व्यवस्थापनाला कोड्यात टाकणाऱ्या ठरतात.

साठ्याचं हे गणित मांडणं आणि ते सोडवणं यासाठी इन्व्हेण्टरी कण्ट्रोल या विषयाचा उदय झाला आणि हा विषय आता ऑपरेशन्स रिसर्च या विषयाची अविभाज्य उपशाखा मानण्यात येतो. या गणिती पद्धतीचा गाभा म्हणजे सोनेरी मध्य काढणं होय. म्हणजेच साठवणीशी निगडित सर्व खर्चाचा आढावा घेऊन कमीतकमी खर्चाचा पण आवश्यक अशा प्रमाणाचा साठा किती असावा हे शोधून काढणं. या संदर्भात पुढील दोन बाबी महत्त्वपूर्ण ठरतातः

- **मागणी नोंदवण्याचा खर्च –** पत्र, टेलिफोन, फॅक्स आणि इतर ऑफिसवर्कसाठी येणारा खर्च
- **साठा बाळगण्याचा खर्च –** जागा, भाडं, विमा हप्ता, सुरक्षा आणि देखभाल, तसंच भांडवल अडकल्याचा खर्च

वरील खर्च सहसा साठ्याच्या प्रमाणात असल्यामुळे प्रत्येकाला गणिती सूत्रांच्या (equation) स्वरूपात मांडणं शक्य आहे. व त्या सूत्रांचा जिथे छेद होतो, ती संख्या सर्वोत्तम साठा प्रमाण (economic order quantity (EOQ)) दर्शवतं. प्रत्यक्ष व्यवहारात मात्र इतर अनेक बाबींचा विचार करावा लागतो. उदाहरणार्थ, मागणीची अनिश्चितता, मालाचा पुरवठा होण्यासाठी लागणारा वेळ, अधिक प्रमाणावर माल खरेदी केल्यास किमतीत मिळणारी सवलत आणि माल खराब किंवा कालबाह्य होण्याची शक्यता. जमेची बाजू म्हणजे असे सर्व घटक गणित आणि सांख्यिकी शास्त्राद्वारे विचारात घेता येतात. त्यानुसार अनेक प्रकारची इन्व्हेण्टरी मॉडेल्स गणिती रूपात विकसित करण्यात आली आहेत. त्यांचा वापर करून व्यवस्थापनाला पुढील बाबतीत निर्णय घेण्यास मदत मिळतेः

- साठा किती प्रमाणात असावा.
- साठा भरून काढण्यासाठी मागणी केव्हा नोंदवावी.
- कमीतकमी किती साठा असावा. (safety stock level)

मोठ्या कारखान्यात प्लाण्ट मॅनेजरला इन्व्हेण्टरीचा प्रश्न तीन वेगळ्या पातळीवर हाताळावा लागतो. एक म्हणजे कच्चा माल किती साठवावा, दुसरं म्हणजे प्रक्रियेमध्ये असलेला माल किती प्रमाणात असावा (work in process inventory) आणि तिसरं म्हणजे उत्पादित वस्तू किती प्रमाणात साठवून ठेवाव्यात. या सर्व साठवणीमुळे भांडवल अडकलं जातं. त्यामुळेच योग्य प्रमाणात साठा असावा यावर भर दिला जातो. भांडवल खेळतं ठेवणं आणि साठा योग्य प्रमाणात करणं या दोन गोष्टी बिझनेसच्या दृष्टीने फारच उपयुक्त ठरतात. म्हणूनच इन्व्हेण्टरीची उलाढाल (turnover) जितकी जास्त त्या प्रमाणात आर्थिक क्षमता जास्त असं दिसून येतं आणि त्यासाठी पुढील सूत्र वापरलं जातं.

$$\text{इन्व्हेण्टरी टर्नओव्हर} = \frac{\text{साठ्यातून विक्री केलेल्या मालापासून उत्पन्न}}{\text{इन्व्हेण्टरीमधील सरासरी गुंतवणूक}}$$

आता इन्व्हेण्टरी मॅनेजमेण्टसाठी विविध सॉफ्टवेअर्स विकसित करण्यात आली आहेत. त्यांचा वापर करून साठा केलेल्या प्रत्येक वस्तूचा विक्रीक्रम, कच्चा मालाच्या किमतीत झालेले चढ-उतार, उत्पादित वस्तूंच्या मागणीत झालेले विविध बदल आणि अशा अनेक बाबींचा अभ्यास करता येतो. यामुळे योग्य ते निर्णय घेण्यास मदत मिळतं. इथे लक्षात ठेवायला हवं, की सॉफ्टवेअर फक्त गणिती मॉडेल कार्यान्वित करत. म्हणून नवीन परिस्थितीसाठी नवीन मॉडेल तयार करणं किंवा सद्य मॉडेलमध्ये बदल करणं हे एक आव्हान असतं.

इन्व्हेण्टरी कण्ट्रोल या विषयाला जपानमध्ये विकसित झालेल्या जस्ट-इन-टाइम (Just-in-Time) या संकल्पनेने एक प्रकारे आव्हान दिलं होतं. या नवीन संकल्पनेनुसार कच्च्या मालाची साठवण न करता, ज्या वेळी उत्पादन प्रक्रिया सुरू करायची असेल त्या वेळी सर्व माल प्लाण्टवर थेट पुरवायचा हे अपेक्षित असते. मोठ्या प्रमाणावर अशी व्यवस्था राबवणं जिकिरीचे असतं आणि त्याचबरोबर कच्चा माल पुरवठा करणाऱ्या कंपन्या आणि वितरकांना त्यांच्याकडील इन्व्हेण्टरीचं अतिशय कार्यक्षम व्यवस्थापन करणं गरजेचं आहे. एकूणच सर्व व्यवस्था इन्व्हेण्टरी आणि ट्रान्सपोर्ट मॅनेजमेण्ट या दोन बाबींशी जोडली जाते. यामुळे आणखी प्रगत गणिती मॉडेल्स विकसित करण्याला चालना मिळाली.

जागतिकीकरणामुळे माल (कच्चा तसंच उत्पादित) साठवण्यासाठीची जागा जिथे खर्च सर्वात कमी असेल अशा निष्कर्षावर निवडण्याचा कल होऊ लागला आहे. त्यामुळे कच्चा माल, प्रक्रियेचा प्लाण्ट आणि उत्पादित माल साठवणं या तिन्ही बाबींसाठी आवश्यक जागा वेगवेगळ्या शहरात किंवा देशात देखिल असू शकतात. साहजिकच इन्व्हेण्टरी, प्रॉडक्शन व मार्केटिंग यांचा समन्वय साधणं अशा परिस्थितीत फार महत्त्वाचं ठरतं. म्हणूनच नवीन एकात्मिक (integrated) मॉडेल्स तयार करण्यावर भर दिला जात आहे. त्याचबरोबर भांडवल पुरवठा कसा असावा याचा विचार करणं भाग पडत आहे.

एकूणच इन्व्हेण्टरी कण्ट्रोल या विषयात भरपूर प्रमाणात संशोधन होत आहे आणि होत राहणार, यात शंका नाही. सेवा नियोजन आणि मनुष्यबळाचं व्यवस्थापन या क्षेत्रातही उपरोक्त मॉडेल्स वापरणं आणि विकसित करणं याला वाव आहे. या विषयात रस असल्यास उपलब्ध पुस्तकं, जर्नल्स आणि वेबसाइट्स असं मुबलक साहित्य चाळून पाहता येईल आणि नंतरच संशोधनासाठी विषय हाती घ्यावा. इंजिनीअरिंगची डिग्री असेल, तर या विषयात प्रावीण्य मिळवल्यास भरपूर संधी उपलब्ध आहेत. विशेषतः मॅन्युफॅक्चरिंग क्षेत्रात अधिक संधी आहेत.

✤

८

गॅरण्टी आणि गणित

+ × ∑ ∫

वस्तू विकत घेताना त्या किती टिकतील, लवकर बिघडणार नाही ना, याची खातरजमा आपण करतो. विक्रेता तसंच उत्पादक त्यांच्या मालाची काही मर्यादित काळापुरती हमी (guarantee / warranty) देतात. पण त्या उत्पादनाबाबत खात्रीलायक आश्वासन देणं कसं शक्य होतं ? या संदर्भात गणिताचीच मदत घेतली जाते. एखाद्या उत्पादन किंवा संयत्रणा यांची विश्वसनीयता तपासण्यासाठी रिलायबिलिटी थिअरि (reliability theory) या स्टॅटिस्टिक्सवर आधारित उपशाखेची रचना करण्यात आली. ही शाखापण आता ऑपरेशन्स रिसर्च या विषयाचा भाग मानली जाते.

वस्तूंची हमी देताना प्रथम प्रत्येक घटकाचा बिघडणं किंवा काम व्यवस्थितपणे न करणं याचा दर (failure rate) निरीक्षणाद्वारे काढला जातो. यावरून वस्तूची विश्वसनीयता स्टॅटिस्टिक्समधील एक्सपोनेन्शियल डिस्ट्रिब्युशन (exponential distribution) स्वरूपात मांडली जाते. पुढची पायरी म्हणजे असे सगळे घटक एकमेकांशी एका रांगेत (in series) किंवा समांतरपणे (parallel) जोडले आहेत त्याची दखल घेऊन गणिती नियमानुसार प्रत्येक घटकाच्या reliability function वर प्रक्रिया केली जाते. त्यावरून

वस्तूची विश्वसनीयता म्हणजेच किती काळ ती वस्तू व्यवस्थितपणे काम करेल याचा अंदाजे कालावधी मांडता येतो. रिलायबिलिटी थिअरिची उपयुक्तता लक्षात घेऊन बहुतेक सर्व उत्पादक उत्पादनाचा दर्जा सुधारण्यासाठी तिचा वापर करताना आढळतात. या विषयात विपुल प्रमाणात संशोधन झालं असून अद्याप जगभरात ते सुरू आहे. याचं मुख्य कारण म्हणजे टेक्नॉलॉजीतील प्रगतीमुळे नवीन प्रकारची यंत्रसामुग्री आणि उत्पादनं तयार होत आहेत आणि आजच्या स्पर्धेच्या युगात टिकून राहण्यासाठी त्यांची विश्वसनीयता हा एक महत्त्वाचा घटक ठरत आहे.

मानवनिर्मित उपग्रहांच्या कार्यातही या गणिती पद्धतीचं मोठं योगदान आहे. उपग्रह अवकाशात गेल्यावर त्यातील एखादी बिघडलेली वस्तू किंवा यंत्रणा दुरुस्त करणं जवळजवळ अशक्य असतं. म्हणून अतिरिक्त किंवा राखीव वस्तू, यंत्रणा उपग्रहात ठेवावी लागते. पण प्रत्येक घटकासाठी किमान एक राखीव घटक असावा असं म्हटलं, तर त्या उपग्रहाचं वजन खूपच वाढेल. त्यामुळे त्या उपग्रहाला कक्षेत नेण्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या इंधनाचा खर्च तसंच कार्यक्षम राहण्यासाठी लागणाऱ्या ऊर्जेची गरज कित्येक पटीने वाढेल. म्हणूनच नेमक्या कोणत्या घटकांसाठी राखीव घटक असावेत याची निवड महत्त्वाची ठरते. तसंच या घटकांची जडणघडण कशी असावी हे सुध्दा महत्त्वाचं असतं. असे सर्व निर्णय घेताना रिलायबिलिटी थिअरिचा वापर होतो.

रोजच्या जीवनात आपल्याला कम्प्युटरचा वापर करावा लागतो. कम्प्युटर व्यवस्थितपणे चालण्यासाठी हार्डवेअर आणि सॉफ्टवेअर या दोन्ही घटकांनी स्वतंत्रपणे तसंच संयुक्तपणे आखून दिल्याप्रमाणे काम करावं लागतं. हार्डवेअर हा यांत्रिक भाग असल्यामुळे त्याची विश्वसनीयता निश्चित करणं हे पारंपरिक रिलायबिलिटी थिअरि द्वारे शक्य होतं. उदा., संगणकाचा मुख्य प्रोसेसर (main processing chip) नादुरुस्त होण्याची शक्यता १/१,००,००० अशा नगण्य स्वरूपाची असते. मात्र सॉफ्टवेअर वैचारिक स्वरूपाचं असून अनेक तज्ज्ञांनी एकत्रपणे मिळून तयार केलेले असतं. अशा प्रचंड स्वरूपाच्या सॉफ्टवेअरमधील दोष शोधणं तसंच त्याची विश्वसनीयता ठरवणं हे कठीण काम आहे. पण ही बाब महत्त्वाची ठरत आहे कारण कम्प्युटर काम न करणं किंवा सदोषपणे काम करणं यामुळे नुकसान होण्याची शक्यता भविष्यात नाकारता येणार नाही.

या दृष्टिकोनातून ‘सॉफ्टवेअर रिलायबिलिटी’ (software reliability) ही एक नवीन उपशाखा उदयास आली आहे. याचा आधार घेऊन सॉफ्टवेअर सक्षम करणं आणि चुका होण्याची शक्यता कमी करणं यावर भर दिला जातो. अभ्यासावरून असं लक्षात आलं आहे, की सॉफ्टवेअरमधील स्वतंत्र घटक (module or unit) निर्दोषपणे काम करत असलं तरी ते संयुक्तपणे काम करताना चुका होतात. म्हणजेच एकूण सॉफ्टवेअरचं डिझाइन सदोष असू शकतं. पण त्यातील उणीवा शोधून काढणं म्हणजे गवताच्या ढिगाऱ्यातून टाचणी शोधून काढण्याएवढं कठीण आहे. एकूणच ही समस्या गणित आणि कम्प्युटर सायन्समधील संशोधनासाठी एक खाण आहे. या संदर्भात आता काही सॉफ्टवेअर डिझाइन टूल्स जसे की 'ALLOY' नावाचे सॉफ्टवेअर, विकसित केली गेली आहेत, पण विकासाला भरपूर वाव आहे.

वस्तूच्या विश्वसनीयतेशी संबंधित आणखी एक बाब म्हणजे वस्तू केव्हा बदलावी ? अनेकदा वस्तू किंवा यंत्र काम करत असलं तरी त्याची कार्यक्षमता (efficiency) कमी होते आणि त्याचे दुष्परिणाम होतात. अशा समस्यांचा अभ्यास करण्यासाठी ऑपरेशन रिसर्च या विषयाची रिप्लेसमेण्ट थिअरि (replacement theory) ही एक उपशाखा अस्तित्वात आली. अर्थातच ती रिलायबिलिटी थिअरिशी संबंधित आहे. यंत्राची कार्यक्षमता कमी होत जाण्याचा दर, यंत्र संपूर्णपणे बंद पडण्याची शक्यता, नवीन यंत्र लगेच किंवा नंतर विकत घेतल्यास त्यासाठी लागणारी किंमत आणि त्यामुळे कार्यक्षमतेत होणारे बदल या सगळ्यांचं गणिती विश्लेषण रिलायबिलिटी थिअरि अंतर्गत विकसित मॉडेल्सद्वारे करता येतं आणि यंत्र केव्हा बदलावं याबाबत निर्णय घेता येतो. त्याचप्रमाणे फक्त एकच घटक बदलावा की पूर्ण सयंत्रणा बदलावी यासाठी मार्गदर्शन मिळतं. उदाहरणार्थ, शहरातील रस्त्यावरील दिवे नादुरुस्त होईल तसे किंवा काही कालावधीनंतर सरसकटपणे बदलावेत, यातील कोणतं धोरण फायदेशीर ठरेल याचं उत्तर अशी मॉडेल्स देतात.

यांत्रिकीकरण आणि कम्प्युटरचा वाढत जाणारा वेग पाहता रिलायबिलिटी थिअरि आणि रिप्लेसमेण्ट थिअरि यांचा उपयोग विविध क्षेत्रांत वाढेल यात शंका नाही. या विषयात संशोधन करून नवीन समस्यांवर उत्तर शोधून काढणं हे आव्हान आहे. भौतिकी जीवनातील उपयुक्त गोष्टींसाठी गणिताचा असा वापर ही एक उल्लेखनीय आणि समाधानकारक बाब आहे.

✤

९

निर्णय घेताना

+× ∑ ∫

दैनंदिन व्यवहारात आपल्याला अनेक प्रकारचे निर्णय घ्यावे लागतात. केवळ माणसातच नाही, तर सर्वच सजीवांमध्ये हा गुण दिसतो. प्राणी त्यांचे निर्णय घेताना त्यांच्याकडील नैसर्गिक क्षमतेचा वापर करतात. माणसाप्रमाणे विकसित बुद्धी त्यांच्याकडे नसल्यामुळे त्यांच्या कृती मर्यादित राहतात. पण मनुष्य प्रत्येक कृती करण्याआधी त्याचं गणित मांडून त्याप्रमाणे निर्णय घेऊ शकतो.

रोजच्या आयुष्यात आपल्याला अनेक निर्णय घ्यावे लागतात. केवळ मनुष्यप्राण्यालाच नाही, तर सर्वच सजीवांना निर्णय घ्यावे लागतात. उदाहणार्थ, झाडांना सूर्यप्रकाशाची गरज असते. हा सूर्यप्रकाश मिळवण्यासाठी आपली उंची, रुंदी किती वाढवणं योग्य ठरेल, याचा अंदाज घेऊन त्यांच्या फांद्यांचा विस्तार झालेला दिसतो. मुंग्या किंवा मधमाश्या आपलं खाद्य वारूळ किंवा पोळ्यापर्यंत नेण्यासाठी कमीतकमी ऊर्जा खर्च होईल असा मार्ग शोधतात. हे सचेतन जीव असे निर्णय घेण्यासाठी त्यांच्याकडे असणाऱ्या नैसर्गिक किंवा उपजत क्षमतेचा वापर करतात. त्यांच्याकडे मानवासारखी

विकसित बुद्धी नसते. त्यामुळे त्यांच्या कृती मर्यादित राहतात. त्यांच्या कृतींचं गणित आपल्याला मात्र मांडता येतं आणि त्यापासून धडाही घेता येतो.

मनुष्य हा प्रत्येक कृती करण्याआधी त्याचं अमूर्त स्वरूपात गणित मांडू शकतो आणि उत्तराप्रमाणे निर्णय घेऊ शकतो. गणिती बुद्धीचं हे वरदान माणसाला आता परग्रहावर वस्ती करता येईल इतक्या पुढे घेऊन गेलं आहे. या सर्व विकासामुळे दैनंदिन व्यवहार ते संपूर्ण समाजाचं अस्तित्व टिकवणं अशा विविध स्तरांवर निर्णय घेणं मानवाला भाग पडतंय. साहजिकच वैयक्तिक, कौटुंबिक, सामाजिक, राष्ट्रीय आणि आंतरराष्ट्रीय पातळीवर घ्याव्या लागणाऱ्या निर्णयांची व्याप्ती, पार्श्वभूमी आणि परिणाम या सगळ्यात फरक असतो. दुसऱ्या शब्दांत असं म्हणता येईल, की निर्णयांच्या अनेक छटा आहेत आणि त्याचबरोबर निर्णय घेणारी प्रत्येक व्यक्ती तिच्या प्रकृती किंवा स्वभावाप्रमाणे वागते आणि त्यामुळे अनेक वेळा बरेचसे निर्णय एकमेकांना पूरक किंवा छेद देणारे ठरू शकतात. अर्थातच त्यामुळे निर्णय घेण्याची प्रक्रिया गुंतागुंतीची ठरते.

सुदैवाने निर्णयांचा अभ्यास करण्यासाठी तसंच निर्णय घेण्यास मदत करण्यासाठी विविध प्रकारच्या गणिती पद्धती विकसित झाल्या आहेत आणि पुढेही होत राहतील. कारण विकासाबरोबर नवीन समस्याही निर्माण होतील. काही निवडक निर्णय घेण्याचे प्रसंग आणि त्यासाठी उपलब्ध गणितावर आधारित प्रक्रिया आणि मॉडेल्सबाबत चर्चा करणं योग्य ठरेल.

१) **वैयक्तिक पातळीवरील अनिश्चितता :** फायनान्शिअल इन्व्हेस्टमेण्ट, अभ्यासक्रमाची निवड, नोकरी किंवा व्यवसायात बदल, विविध प्रकारच्या स्पर्धा इत्यादी.

२) **उद्योग आणि वाणिज्य संस्थांसमोर असणारी आव्हानं –** माल किंवा सेवा किमान किमतीत पण दर्जेदार स्वरूपात तयार करणं, किमान खर्चात माल पाहिजे तिथे वेळेत पोहोचवणं, स्पर्धेत टिकून राहणं, कोणती टेक्नॉलॉजी वापरणं, मनुष्यबळाचं व्यवस्थापन इत्यादी.

३) **लष्करी संस्थांसाठी डावपेच –** शत्रूंची लष्करी माहिती मिळवून तिचा अन्वयार्थ शोधणं, वेगवेगळ्या ठिकाणावर लढण्यासाठी रणनीती ठरवणं, योग्य लढाऊ तंत्रज्ञान प्राप्त करणं, रसद पुरवण्याचे मार्ग आखणं इत्यादी.

४) **न्यायदानासाठी लागणारं तारतम्य –** निरपराध व्यक्तीला शिक्षा होऊ नये, साक्षीदाराची विश्वनीयता तपासणं, गुन्हेगार सिद्ध झालेल्या व्यक्तीला चूक सुधारण्याची संधी देणं इत्यादी.

५) **सर्वसामान्य प्रशासनाची जबाबदारी –** एखाद्या धोरण किंवा प्रकल्पाच्या संरचनेमध्ये कमाल नागरिकांचा आणि संस्थांचा सहभाग मिळवणं, योजना राबवताना जास्तीतजास्त लोकांचा फायदा करून देणं, पर्यावरणाची काळजी घेणं, शक्य तेवढं सर्वांच्या अपेक्षा पूर्ण करणारे निर्णय घेणं इत्यादी.

अशा सर्व प्रकारचे निर्णय घेण्यासाठी अनेक गणिती पद्धती उपलब्ध आहेत आणि त्या गणितातील विविध शाखा, उपशाखांवर आधारित आहेत. म्हणूनच त्यांना Quantitative Methods किंवा Decision Analysis अशी व्यापक संज्ञा दिली जाते. गणित, सांख्यिकी आणि ऑपरेशन्स रिसर्च या विषयांत विकसित झालेली मॉडेल्स आणि पद्धती असे निर्णय घेण्यासाठी फार मोठ्या प्रमाणात वापरली जातात. अशा प्रणालींना Decision Support Systems असं म्हटलं जातं. त्यातील काही प्रमुख पद्धती आणि त्यांच्या वापराच्या परिस्थिती पुढीलप्रमाणे आहेत:

- *प्रॉबेबिलिटी आणि रिस्क थिअरि:* फायनान्शिअल इन्व्हेस्टमेण्ट, विमा गुंतवणूक, मार्केटिंग, तंत्रज्ञानाची निवड इत्यादी.
- *टाइम सीरीज आणि रिग्रेशन ॲनालिसिस:* शेअर बाजारातील गुंतवणूक, मार्केटिंग सर्विस मॅनेजमेण्ट इत्यादी.
- *हायपोथिसिस टेस्टिंग आणि डिसिजन थिअरि:* मालाचा दर्जा तपासणं, आरोपीबाबत निर्णय घेणं, गुंतवणूक इत्यादी.
- *लिनिअर प्रोग्रामिंग:* साधनांचं योग्य वाटप, मालाची आवक–जावक, उत्पादनप्रक्रियेचं सुनियोजन आदी.
- *गेम थिअरि:* लष्करी डावपेच आखणं, विवाद सोडवणं, आर्थिक आणि सामाजिक पातळीवरील समस्यांवर उपाय सुचवणं आदी.
- *पर्ट, सीपीएम:* प्रोजेक्ट मॅनेजमेण्ट आणि साधनांचा सुयोग्य वापर.
- *एनेलॅटिक हायरारकी प्रोसेस, इण्टरप्रीटिव्ह स्ट्रक्चर मॉडेलिंग आणि सॉफ्ट ऑपरेशन्स रिसर्च मेथड्स:* निर्णयप्रक्रियेत लोकांचा कमाल

सहभाग करणं, सर्वानुमते प्रक्रिया किंवा कामांचा अग्रक्रम ठरवणं, समस्यांना चित्ररूपात मांडून संबंधित व्यक्तींना उत्तरं शोधण्यास मदत करणं वगैरे.

- *काम्प्रोमाइझ प्रोग्रामिंग (तडजोड तंत्र):* एखादं धोरण, प्रकल्प किंवा व्यक्तीची सर्वानुमते निवड करताना निर्माण होणाऱ्या विवादास्पद परिस्थितीवर मात करणं.

यावरून कळतं की प्रत्येक समस्या सोडवण्यासाठी आणि निर्णय घेण्यासाठी आपण गणिताचा विविध प्रकारे वापर करतो. त्याला कम्प्युटरची जोड मिळाल्यामुळे आकडेमोडीची जटीलता आणि कष्ट दूर झाले आहेतच. याशिवाय काही नवीन पद्धती विकसित करण्यासही बहुमोल मदत मिळाली आहे. बहुतेक सर्व गणिती मॉडेल्स प्रत्यक्षात वापरण्यासाठी सॉफ्टवेअर पॅकेजेस उपलब्ध असून त्यात सुधारणा आणि भर पडत आहे.

इथे एक गोष्ट लक्षात ठेवली पाहिजे, की गणिती मॉडेल्स आणि चौकट (framework) काही गृहितकांवर (assumptions) आधारित असतात व वस्तुनिष्ठ (objective) पद्धतीने कार्य करतात, तर मानवी व्यवहार आणि निर्णय अनेकदा आत्मनिष्ठ किंवा वैयक्तिक (subjective) पद्धतीने घेतले जातात. त्यामुळे गणिती निर्णय वापरताना सदर घटकांचा विचार करणं योग्य ठरतं. मात्र निर्णय घेण्यासाठी गणिती पद्धती निश्चितच मार्गदर्शक ठरू शकतात. याबाबत वाद नसावा.

✤

१०

रांगोळीचं गणित

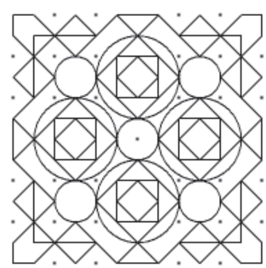
+× ∑ ∫

आपल्या आजुबाजूच्या अनेक गोष्टींमध्ये गणिताचा वापर केलेला असतो. पण बऱ्याचदा ते आपल्या लक्षात येत नाही. रांगोळी हे याचंच एक उदाहरण. रांगोळीतील प्रमाणबद्धतेकडे पाहिलं, तर ते समजून येईल. रांगोळी भूमिती आणि पुनरावृत्ती आवर्तन (recursive function) **या गणिती पद्धतीने तयार झालेली असते. रांगोळीतील याच गणिताचा अभ्यास करण्यासाठी ग्राफ थिअरि आणि नेटवर्क ॲनालिसिस या गणिती शाखांचा वापर करता येतो.**

घरासमोर रांगोळी काढण्याची परंपरा आपल्याकडे फार प्राचीन काळापासून आहे. उत्सव किंवा सणाच्या वेळेस अशी रांगोळी काढणं, हा आपल्या संस्कृतीचा भाग आहे. रांगोळी काढणं ही एक कला आहे. बहुतांश भारतीय महिलांमध्ये उपजतच ही कला असल्यामुळे त्याचं खास प्रशिक्षण घेतलं जात नाही. आजच्या यांत्रिक युगात रांगोळी काढण्यासाठी विविध प्रकारचं रंगसाहित्य आणि उपकरणंही बाजारात मिळतात.

रांगोळी आकर्षक का वाटते, याचं उत्तर फक्त रंगांमुळे नसून तिची समप्रमाणबद्धता (symmetry) हे होय. रांगोळीचं बारकाईने निरीक्षण केल्यास असं आढळेल की रांगोळीचा गाभा एक लघुचित्र घटक असतो. हाच घटक पुनःपुन्हा वापरून संपूर्ण रांगोळी काढण्यावर भर असतो. अर्थातच समप्रमाणता अनेक प्रकारे प्राप्त करता येते. उदाहरणार्थ, डावी–उजवी बाजू, वर–खाली आणि विविध कोनातील विकर्णाच्या मदतीने. दुसऱ्या शब्दात सांगायचं झालं, तर रांगोळी ही भूमिती आणि पुनरावृत्ती आवर्तने (recursive function) या गणिती पद्धतीने तयार झालेली असते. रांगोळी काढण्यात दंग असलेल्या व्यक्तीला यासाठी विशेष प्रयत्न करावे लागत नाहीत. कारण नैसर्गिकपणे प्रमाणबद्धता आणण्याचा कल आणि सवयीमुळे हे सहज घडतं. मात्र नव्याने रांगोळी काढणाऱ्यांना अशा प्रकारे मार्गदर्शन करणारी पुस्तके बाजारात उपलब्ध आहेत. एकूणच रांगोळीचं गणित सहजासहजी अंगवळणी पडतं.

रांगोळी ही टिंब/ठिपके आणि सरळ, वक्र रेषा यांचं जाळंच असतं. अशा प्रकारच्या जाळ्यांचा अभ्यास करण्यासाठी ग्राफ थिअरि आणि नेटवर्क ॲनालिसिस या गणिती शाखांचा वापर करणे शक्य आहे. त्यांचा वापर विविध क्षेत्रांतील व्यवस्थापनासाठी केला जातो. जलवाहिन्या, विद्युत्‌तारा, टेलिफोन, केबल्स, रेल्वे आणि रस्ते यांचं नियोजन आणि वापर करताना या गणिती शाखांचं योगदान असतं, हे सहसा लक्षात येत नाही. म्हणूनच रांगोळीचा गणिती अभ्यास फार महत्त्वपूर्ण ठरू लागला आहे. एका अर्थाने ही आणखी एक भारतीय भेट गणित जगताला आहे असं म्हटल्यास अतिशयोक्ती ठरू नये.



रांगोळी– ठिपके आणि रेषा यांची कलात्मक जाळी

रांगोळीच्या गणिताचं इतर अनेक संकल्पना आणि ज्ञानशांखाबरोबर असलेले संबंध आता कळून येऊ लागले आहेत. त्यातील प्रमुख म्हणून चित्ररूपी औपचारिक भाषेचा विकास याचा उल्लेख करता येईल. या भाषेची कम्प्युटरवर आधारित ग्राफिक्स तयार करण्यात मदत होते. या भाषेची सुरुवात रांगोळी तयार करताना बिंदू किंवा टिंबापासून सरळ रेषा किंवा एखाद्या बाजूला वळण किंवा अशी वळणं घेऊन वर्तुळासमान चित्र पूर्ण करणं या संरचना

नियमावर आधारित असते, या निरीक्षणावरून याची सुरुवात झाली. या भूमिती नियमांना बीजगणितातील परिवर्तन नियमात (transformation rules) सहजपणे बदलता येतं. यामुळे टिंब किंवा रेषा न वापरता अ, ब, क, आदी चिन्ह किंवा संज्ञा (symbols) यांच्यावर हे नियम लावून शब्द आणि त्या जोगी भाषा निर्माण करणं शक्य होतं. अशी भाषा संपूर्णपणे deterministic आणि context free या स्वरूपाची असते. जगप्रसिद्ध भाषाशास्त्रज्ञ नोअम चॉम्स्की यांनी सांगितलेल्या भाषेच्या सूत्रबद्ध रचनानिर्मितीच्या चौकटीत ती बसते. साहजिकच ही भाषा कम्प्युटर प्रक्रियांना अतिशय पूरक आहे. कम्प्युटरला आपल्यासारखी बुद्धी नसल्यामुळे परिस्थितीप्रमाणे शब्दांचा अर्थ बदलणारी (context dependent) भाषा वापरणं सुलभ नाही. मागील तीन दशकांत रांगोळीच्या अभ्यासावरून कम्प्युटरसाठी भाषांची निर्मिती करणं हे काम मोठ्या प्रमाणात सुरू आहे. यात भारतीय गणितज्ज्ञ आणि कम्प्युटर तज्ज्ञांचं योगदान उल्लेखनीय आहे.

रांगोळी ही लघु घटकाच्या रूपांतराच्या पुनरावृत्तीने तयार झालेली असते. या निरंतर प्रक्रियेमुळे स्वयं समरूपी चित्र तयार होतं. हे चित्र नेहमीच मोहक असते. मात्र याच गणिती प्रक्रियेमुळे अपूर्णमित अशा भूमिती आकृत्या (fractal geometry figures) तयार होतात. आपण सहसा कुठल्याही आकृतीची मिती (dimension) ही पूर्णांक असते असं मानतो जसे की टिंबाची मिती शून्य, सरळ रेषेची मिती एक, चौरसाची मिती दोन इत्यादी. मात्र रांगोळीसारख्या पुनरावृत्ती करून स्वयं-समरूपी रचना करत तयार केलेल्या आकृतीची मिती १.५८ अशा अपूर्णांक स्वरूपाची असते. या नवीन कंगोरी भूमितीचा (fractal geometry) शोध फ्रेंच गणितज्ज्ञ बी. मँडेलब्रॉट यांनी १९६० मध्ये लावला. याबाबत आता भरपूर साहित्य उपलब्ध आहे. या भूमितीचा वापर अनेक स्वयंसंघटन आणि स्वयंविघटन अशा प्रकारे घडणाऱ्या नैसर्गिक, आर्थिक आणि सामाजिक घटनांचं विश्लेषण करण्यासाठी केला जात आहे. या संदर्भात रांगोळीचे विविध नमुने अभ्यासून नवीन संकल्पना विकसित करण्यास बराच वाव आहे.

रांगोळी सहसा जमिनीवर काढत असल्यामुळे आपण तिच्या द्विमितीतील रूपाशी परिचित आहोत. रांगोळी त्रिमितीत कशी दिसेल ? प्रत्यक्षात अशी रांगोळी काढणं कठीण असलं तरी कम्प्युटरच्या मदतीने ते शक्य आहे. साहजिकच त्या आभासपूर्ण (virtual) रांगोळीत रंग, आकारात बदल करणं

आणि प्रमाणबद्धता बदलण्याचे प्रयोग करणं सहज शक्य आहे. त्यांचा वापर जाहिराती तयार करणं, कपड्यावर नवीन डिझाइन्स करणं, कार्टून फिल्मस तयार करणं अशा अनेक क्षेत्रांत होतो.

रांगोळीत दडलेले गणितीविश्व किती व्यापक, रंगपूर्ण आणि अर्थपूर्ण आहे हे यावरून लक्षात आलं असेल. हे गणित मूलभूत आणि उपयोगिता (basic and applied) या दोन्ही बाजूंनी परिपूर्ण आहे यात शंका नाही. आपल्या देशात रांगोळीचे बहुविध रचनाप्रकार वापरले जातात. त्यांचा व्यवस्थित गणिती अभ्यास झाल्यास काही नवीन संकल्पना निर्माण होण्याची शक्यता नाकारता येत नाही. म्हणूनच रांगोळीकडे चित्रकलेचा दुय्यम प्रकार म्हणून न बघता ते एक गणिती आव्हान आहे, असं मानून अभ्यास करायला हवा.

✤

टीपः या लेखातील चित्र पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आले आहे व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

रांगोळी- ठिपके आणि रेषा यांची कलात्मक जाळी - *www.aspexdesign.co.uk*

११

स्टॅटिस्टिशियन नर्स

+ × ∑ ∫

गणिताच्या विश्वात गणित आणि संबंधित उपशाखांमधील विविध प्रक्रिया वापरल्या जातात. या प्रक्रिया वापरून आकडेवारीचा संयुक्तिक अर्थ काढताना गणितज्ज्ञांना खूप निरीक्षण आणि अभ्यास करावा लागतो. स्टॅटिस्टिक्समधील संशोधनासाठी असंच एक नाव घेतलं जातं, फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल यांचं! आधुनिक नर्सिंग सायन्सची जननी आणि महत्त्वाचं म्हणजे उच्च दर्जाच्या स्टॅटिस्टिशियन म्हणून त्या जगभर ओळखल्या जातात.

आधुनिक नर्सिंग सायन्सची जननी म्हणून फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल (१८२०–१९१०) ओळखल्या जातात. ब्रिटिश लष्कराच्या हॉस्पिटल्समधील गलिच्छता हे सैनिकांच्या मृत्यूचं मुख्य कारण आहे, हे त्यांनीच आकडेवारीनिशी सिद्ध केलं. त्यांच्या प्रयत्नामुळे ब्रिटिश लष्कराच्या आरोग्यव्यवस्थेची चौकशी करण्यासाठी रॉयल कमिशन (१८५८) नेमण्यात आलं. या कमिशनने फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल यांचा क्रिमियन युद्धातील लष्करी हॉस्पिटल आणि आरोग्याबाबतचा अनुभव तसंच विविध प्रकारच्या आकडेवारीचा भरपूर उपयोग केला. त्या आधारे छावणीच्या खोल्या (बरॅक्स),

पाणीपुरवठा, सांडपाण्याचा निचरा आणि खानावळीतील स्वच्छता वाढवणं यांसारख्या सर्व लष्करी आरोग्यप्रणालींवर विशेष भर दिला आणि त्यासाठी आवश्यक निर्देश दिले. याशिवाय लष्करासाठी वेगळं मेडिकल स्कूल स्थापन करणं आणि आरोग्यविषयक आकडेवारी गोळा करणं अशा दूरगामी परिणामाच्या सूचनाही केल्या. त्यांच्या अंमलबजावणीचा लष्कराच्या आरोग्यावर चांगला परिणाम दिसून आला. म्हणूनच खऱ्या अर्थाने फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल सैनिकांच्या आशादीप ठरल्या.


फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल

फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल या प्रथम श्रेणीच्या परिचारिका होत्या. पण त्या उच्च दर्जाच्या स्टॅटिस्टिशियन होत्या असं म्हटल्यास अतिशयोक्ती ठरणार नाही. याचं कारण म्हणजे आकडेवारी गोळा करत राहण्याचा त्यांचा गुण आणि त्या आकडेवारीचं विश्लेषण करून अर्थ काढणं आणि त्याद्वारे उपाययोजना सुचवण्याचं त्यांचं काम. विविध प्रकारची आकडेवारी मिळवणं आणि त्याचे तक्ते तयार करणं हा छंद त्यांनी लहानपणापासून जोपासला होता.

नाइटिंगेल यांचा काळ स्त्री शिक्षणाला तसंच स्त्रियांनी सैनिक रुग्णांची परिचर्या करावी या दोन्ही बाबतीत प्रतिकूल होता. इंग्लंडमधील सुप्रसिद्ध ऑक्सफर्ड आणि केम्ब्रिज युनिव्हर्सिटीत स्त्रियांना शिक्षणासाठी प्रवेश नव्हता, तेव्हा नाइटिंगेल यांनी वयाच्या विसाव्या वर्षी एका खाजगी शिक्षकाकडून गणिताचं शिक्षण घेतलं.

नर्स बनण्याच्या त्यांच्या निर्णयाला त्यांच्या कुटुंबाने विरोध केला होता. 'नोट्स ऑन नर्सिंग' आणि ८०० पानांचं 'नोट्स ऑन मॅटर्स अफेक्टिंग द हेल्थ, एफिशियन्सी ॲण्ड हॉस्पिटल ॲडमिनिस्ट्रेशन ऑफ द ब्रिटिश आर्मी, फाऊण्डेड चिफली ऑन द एक्सपीरिअन्स ऑफ द लेट वॉर' या पुस्तकरूपी अहवालावरून त्यांची जिद्द, चिकाटी आणि आकडेवारीचा उपयोग करण्याची सिद्धहस्तता दिसते. त्यांच्या अहवालात तक्ते तर आहेतच, पण त्याशिवाय अनेक प्रकारचे आलेखही आहेत. काही आलेखांचा अर्थ एका दृष्टिक्षेपात लक्षात येतो. काही आकृत्या नावीन्यपूर्ण आहेत. त्यांना आता Nightingale's coxcombs म्हटलं जातं.

लंडन इथे १८६० मध्ये भरलेल्या आंतरराष्ट्रीय स्टॅटिस्टिकल काँग्रेसमध्ये नाइटिंगेल यांनी एक शोधलेख सादर केला. त्यात त्यांनी हॉस्पिटलमधील आकडेवारी गोळा करण्यासाठी एक सुसूत्र पद्धती प्रस्तावित केली. तसंच आवश्यक प्रपत्रं (formats) यांचे नमुनेही सादर केले. त्यांची प्रस्तावित योजना सर्वांना फार उपयुक्त वाटली आणि त्याची अंमलबजावणी व्हावी असं ठरवण्यात आलं. काही प्रमाणात ती वापरण्यातही आली. स्टॅटिस्टिक्समधील त्यांच्या या योगदानामुळे या विषयातील कोणतीही पदवी नसताना त्यांना लंडन स्टॅटिस्टिकल सोसायटी (आताची रॉयल स्टॅटिस्टिकल सोसायटी)चं सन्माननीय सदस्यत्व बहाल करण्यात आलं. हा मान मिळवणाऱ्या त्या प्रथम महिला आहेत.

१८५७ मध्ये झालेल्या भारताच्या प्रथम स्वातंत्र्ययुद्धानंतर नाइटिंगेल यांनी भारतात स्थित असलेल्या ब्रिटिश लष्कराच्या आरोग्यसुविधांचा अभ्यास करण्यासाठी एक रॉयल कमिशन नेमावं, याचा पाठपुरावा केला. त्यानुसार असं कमिशन नेमण्यात आलं. नाइटिंगेल यांनी माहिती मिळवण्यासाठी एक विस्तृत प्रश्नावली तयार केली. भारतातून प्राप्त झालेल्या त्या माहिती आणि आकडेवारीचं त्यांनी अतिशय बारकाईने आणि चिकित्सकपणे विश्लेषण केलं. सन १८६३ मध्ये त्यावर आधारित दोन हजार पानी अहवाल तयार करण्यात आला. यात त्यांनी असं दाखवलं, की भारतात तैनात असलेल्या सैनिकांचा मृत्यूदर दर हजार सैनिकांमागे ६९ आहे. सुधारणापूर्व इंग्लण्डमधील वास्तव्य असलेल्या सैनिकांच्या मृत्यूदरापेक्षा हा दर तिप्पट आहे. याला भारतातील हवामान हे मुख्य कारण नसून सैनिक वसतिगृहातील अस्वच्छता आणि गलिच्छपणा ही मुख्य कारणं आहेत. त्यांच्या जवळजवळ सर्व सूचना अंमलात आणल्या गेल्या आणि त्याचा परिणाम म्हणजे दहा वर्षांनंतर हा मृत्यूदर ६९ वरून १८ इतका खाली आला. भारतातील सार्वजनिक आरोग्यव्यवस्थाही त्याचप्रमाणे सुधारावी, यासाठीही त्यांनी काम केलं. यासाठी नेमण्यात येणाऱ्या प्रत्येक व्हाइसरॉयचं भारतातील आरोग्ययंत्रणा कशी सुधारता येईल, याबाबत त्या प्रबोधन करत होत्या.

स्टॅटिस्टिशियन किंवा सायण्टिस्ट नसल्या, तरी आकडेवारी काटेकोरपणे बघणं आणि निष्पक्षपणे त्याचा अर्थ काढणं यावर त्यांचा भर होता. सांख्यिकीचा उपयोग सामाजिक प्रणाली आणि व्यवस्था सुधारण्यास होऊ शकतो, यावर त्यांचा विश्वास होता. शासनाची धोरणं आणि प्रकल्प यांची

योग्य मांडणी तसंच अंमलबजावणीसाठी आकडेवारी व्यवस्थित, नियमित आणि निष्पक्षपातीपणे गोळा करून विश्लेषण करणं गरजेचं आहे असं मत त्यांनी वेळोवेळी मांडलं. यासाठी प्रशासक तसंच सामान्य जनतेस सांख्यिकीचं प्राथमिक प्रशिक्षण देण्यात यावं याबाबतही त्यांनी पुढाकार घेतला.

आजच्या माहिती आणि कम्प्युटरच्या युगातसुद्धा नाइटिंगेल यांचे गणिती आकडेवारीबाबतचे विचार तसंच त्यावर प्रक्रिया करून सामाजिक विकासासाठी योग्य निर्णय घेण्याचा आग्रह आणि तळमळ महत्त्वाची आहे. आपल्या देशात सार्वजनिक क्षेत्रात खर्चात कपात करायची म्हटल्यावर प्रथम स्टॅटिस्टिकल महिती गोळा करणाऱ्या व्यवस्था बंद करणं किंवा मर्यादित करणं असं सुचवण्यात येते. पण याचा दूरगामी परिणाम होतो हे लक्षात घ्यायला हवं. या संदर्भात नाइटिंगेल यांचा आकडेवारीचा उपयोग करण्याचा ध्यास व प्रगत दृष्टिकोन विचार करण्यास भाग पाडतो.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्र पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आले आहे व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल - www.insidesuccessradio.com

१२

गणिताची ‘भाषा’

+× ∑ ∫

गणिताला निसर्गाची भाषा म्हटल्यास अंक ही मूळाक्षरं, तर अंकांपासून तयार झालेल्या संख्यांना शब्द म्हणावं लागेल. तसं पाहिलं, तर गणितातल्या प्रत्येक शाखेची स्वतंत्र भाषा आहे. उदाहरणार्थ, भूमितीसाठी बिंदू, रेषा आणि वक्ररेषा या आधारे रचना केली जाते. मात्र अंकांचा वापर करून गणिताचा अभ्यास करणं सोपं ठरल्यामुळे त्यांना आद्य मूळाक्षरं मानण्यास काही हरकत नाही.

अंक आपल्यासारखे बोलत नसले, तरीही ते बोलके आहेत. काही वेळा ते स्वत: तर काही वेळा त्यांच्यावर सोपस्कार केले की वेगळंच चित्र उभं राहतं. त्यामुळे नवीन विचार करावा लागतो. याचं उत्तम उदाहरण म्हणजे माणसाचा जन्म आणि मृत्यू दर्शवणारे तक्ते. याचा वापर करून वयोगटानुसार त्या-त्या व्यक्तीसाठी आयुर्विम्याचा वार्षिक हप्ता किती असावा हे ठरवणं. हे गणित अंकावरच आधारित आहे. अशी लाइफ टेबल्स कशी बनवावी याची मुहूर्तमेढ एडमण्ड हॅले या प्रसिद्ध खगोलशास्त्रज्ञाने (१६५६-१७४२) रोवली.

हॅले धुमकेतू शोधून काढण्याची कामगिरीही त्यांनीच केली. लंडन, पॅरिस आणि पोलण्डमधील जन्म आणि मृत्यू यांच्या नोंदींचा अभ्यास करून प्रत्येक वयोगटातील मनुष्याचं सरासरी आयुष्य कसं काढता येईल याची पद्धती त्यांनी विकसित केली. त्याच पायावर संपूर्ण विमाशास्त्र (Actuarial Science) उभं राहिलं.

काही वेळा शब्दांचा अर्थ सर्वसामान्यांच्या एकदम लक्षात येऊ नये यासाठीही अंकांचा वापर केला जातो. सामरी महत्त्वाच्या माहितीची देवघेव करण्यासाठी वापरली जाणारी सांकेतिक लिपी, ही याचं उदाहरण. या लिपीचा विकास प्रामुख्याने ज्युलियस सीझर या राजाने लष्करी आदेश गुप्तपणे देण्यासाठी केला. त्यासाठी इंग्रजीतील 'ए' म्हणजे १, 'बी' म्हणजे २...'झेड' म्हणजे २६ असं मूल्य धरून संदेशाचा अंकात बदल आणि नंतर काही विशिष्ट नियम ठरवून ते अंक पुढे किंवा मागे ढकलून सांकेतिक संदेश तयार करून तो विशिष्ट व्यक्तीकडे पाठवला जायचा. यानंतर उपरोक्त नियमाचा उलटा वापर करून मूळ संदेश तयार करून शकेल अशी ही प्रक्रिया होती. या रचनाप्रणालीचा पुढे खूप विकास होऊन Cryptology तसंच Coding Theory या गणितातील उपशाखांची भर पडली. संगणकामुळे अंकाधारित सांकेतिक संदेश तयार करणं तसंच मिळालेल्या सांकेतिक संदेशाचा अर्थ काढणं हे काम मोठ्या प्रमाणावर केल जातं. जगातील जवळजवळ सर्व देशांच्या संरक्षण खात्यात साइफर (cipher) कार्यालय हे काम कम्प्युटरच्या मदतीने अहोरात्र करत असतं.

काही अंकांच्या मालिका आश्चर्यकारक गोष्टी दाखवतात. उदाहरणार्थ, ०,३,६,१२,२४,४८,...ही मालिका तीन या अंकाला दुप्पट करून पुढील अंक काढणे आणि त्या पुढील सर्व अंक त्याच नियमाने तयार केले आहेत. या प्रत्येक अंकात चार हा अंक मिळवून नवीन मालिकेतील प्रत्येक अंकाला दहा या अंकाने भाग दिल्यास ०.४, ०.७, १.०, १.६, २.८, ५.२... अशी मालिका प्राप्त होते. यातील तिसरी संख्या १ म्हणजे सूर्यापासून पृथ्वीचं सरासरी अंतर मानलं, तर उर्वरित संख्या त्या प्रमाणात उरलेल्या इतर ग्रहाचं सूर्यापासून अंतर (सरासरी) दाखवतात (आता ग्रह म्हणून न मानण्यात येणारा प्लुटो आणि नेपच्युन हा ग्रह वगळता.) हा योगायोग आहे, की अंकाचा काही विशिष्ट अर्थ ?

भौतिकशास्त्र आणि इतर काही विज्ञानशाखांतील काही स्थिरांकही (constants) काही विशिष्ट मूल्यच घेताना आढळतात. आता असं सिद्ध झालं आहे, की यातील कोणत्याही स्थिरांकाचं मूल्य काही दुसरं असेल, तर आपल्या विश्वाचं स्वरूप फारच वेगळं असेल आणि मानवाची उत्पत्ती संभवणार नाही. त्या आधारे या विश्वाची निर्मिती मानवासाठीच झाली आहे, असं दर्शवणारा अँथ्रोपिक सिद्धांत (Anthropic Principle) मांडण्यात आला आहे. याबाबत बरंच संशोधन चालू आहे. एकूणच अंकाचा अर्थ फार गहन ठरू शकतो याचा प्रचीती येते.

अंकाची ही ताकद ओळखूनच लोकांची तसंच सर्व मालमत्तेची मोजणी करावी असा मतप्रवाह युरोप आणि अमेरिकेत १९ व्या शतकाच्या सुरुवातीस तयार झाला आणि जनगणना (सेन्सस) करण्याचं काम हाती घेण्यात आलं. सुरुवातीच्या काळात गोळा केलेली माहिती प्रसिद्ध न करण्याकडे कल होता. याचं कारण म्हणजे त्यामुळे परस्पर लष्करीबळाचा अंदाज घेणं शक्य होतं. पुढे युद्धात तंत्रज्ञानाचा वापर वाढीस लागल्यामुळे अशी माहिती प्रसिद्ध होऊ लागली. यामुळेच शिक्षणक्षेत्र, सार्वजनिक आरोग्य, गुन्हेगारी आणि इतर अनेक क्षेत्रांतील त्रुटींचा गोषवारा मिळू लागला. अशी आकडेवारी सरकारने योग्य धोरण आणि योजना आखण्यासाठी वापरावी असं लोकमत वाढीस लागलं. या अंकरूपी माहितीचा उपयोग उद्योगधंद्यासाठीही उपयुक्त ठरला. भारतात १९०१ पासून जनगणना सुरू झाली. दर दहा वर्षांनी जनगणना करण्यात येते. हा क्रम अखंड सुरू आहे ही समाधान आणि अभिमानाची बाब आहे. कारण इतर विकसनशील देशात असं सहसा आढळत नाही.

मात्र, आकडेवारीचा अतिरेक किंवा तारतम्य न बाळगता केलेला उपयोग निषेधार्थ ठरतो. याचं उत्तम उदाहरण म्हणजे जगप्रसिद्ध इंग्रजी लेखक चार्ल्स डिकन्स यांचं साहित्य. त्यांच्या मते आकडेवारीच्या आहारी जाऊन माणसाला एक संख्या मानून घेण्यात येणारे निर्णय सामान्य माणसासाठी जाचक आणि विषम ठरतात. सरासरी माणूस (average person) ही सांख्यिकी शास्त्रातील कल्पना वास्तवात नसलेल्या माणसाची काळजी करते आणि त्यामुळे वैयक्तिक (individual) पातळीवर विपरित परिणामाची दखल घेतली जात नाही. ही खंत त्यांनी १८५४ मध्ये प्रसिद्ध केलेल्या *'हार्ड टाइम्स'* या कादंबरीत मोजमाप आणि फक्त आकडेवारीवर विसंबून राहणाऱ्या व्यक्तीची शोकांतिका चित्रीत

करून व्यक्त केली आहे. माणसाने बुद्धी आणि भावना यांचा समतोल राखायला हवा, तरच समाज सशक्त आणि मानवीय स्वरूपाचा राहील असं मत डिकन्स यांनी आपल्या लेखनातून मांडलं. अंकाची जादू किंवा किमया अजब आहे हे मात्र खरं! ते फसवेही ठरू शकतात किंवा एखाद्या गूढ रहस्याचा भेदही करू शकतात, त्यांचा वापर आपण कसा करतो हे महत्त्वाचे ! अंकाचं एवढं महत्त्व असूनही आजही काही अंक अशुभ मानले जातात. याचं उदाहरण म्हणजे अंक १३. अंकांना असे बोल लावणाऱ्यांना काय बोलायचं ?

✤

१३

खेल खेल मे...

+× ∑ ∫

अगदी पुरातन काळापासून मनोरंजनासाठी वेगवेगळ्या माध्यमांचा वापर केला जातो. काळ बदलला, तशी मनोरंजनाची माध्यमं बदलली. मनोरंजनाचे विविध प्रकार आणि साधनं सतत विकसित झाली. गणिताचाही मनोरंजन क्षेत्रात उल्लेखनीय वाटा आहे. अंकांच्या गमती-जमती, जादूई चौरस (मॅजिक स्क्वेअर्स) बनवणं, छोट्या अंकांपासून महासंख्या तयार करणं असे अनेक प्रकार आणि कोडी सर्व वयोगटातील व्यक्तींचं मनोरंजन करतात.

खरं तर गणित म्हणजे तर्कशुद्ध, रोखठोक आणि भावनाविरहित पद्धतीने प्रक्रिया करण्यावर भर देणारा विषय. तरीही गणिताद्वारे मनोरंजनही करता येतं. गणितातील संकल्पना शिकवतानासुद्धा मनोरंजनात्मक कुटप्रश्न किंवा कल्पित गोष्टी उपयुक्त ठरतात. म्हणूनच पूर्वीपासून गणित आणि मनोरंजन याची युती होत आली आहे. आधुनिक काळात त्याला रिक्रियेशनल गणित (Recreational Mathematics) असं म्हणतात.

गणितज्ज्ञ सहसा या मनोरंजनात्मक गणिताला दुय्यम दर्जाचं गणित मानतात. पण अलीकडच्या काही दशकांत हा दृष्टिकोन बदलला. याचं एक प्रमुख कारण म्हणजे मार्टिन गार्डनर यांनी दोन दशकाहून अधिक काळ *सायण्टिफिक अमेरिकन* या प्रतिष्ठित मासिकात चालवलेला स्तंभ. यामुळे मनोरंजन करण्याची गणिताची क्षमता आणि गणित विषयात आवड निर्माण करण्याचं महत्त्वपूर्ण काम झालं. लक्षात घेण्यासारखी बाब म्हणजे गार्डनर हे स्वतः गणितज्ज्ञ किंवा शिक्षण क्षेत्रात वावरणारे नसूनही त्यांनी हे योगदान केलं. याबद्दल त्यांना अनेक मानसन्मान देण्यात आले आहेत.

ॲलिस इन वण्डरलॅण्ड या जगप्रसिद्ध बालकथेचे लेखक ल्युईस कॅरोल (१८३२-१८९८) यांनीसुद्धा गणिताधारित रंजन करणाऱ्या साहित्याची रचना केली. ते ऑक्सफर्ड युनिव्हर्सिटीत गणित विषय शिकवत, तरीसुद्धा मनोरंजनात्मक गणिताचा विकास करणं त्यांना गैर वाटलं नाही.


दत्तात्रय रामचंद्र कापरेकर

आपल्या सर्वांना अभिमान वाटावा असं मनोरंजनात्मक गणितातील योगदान दत्तात्रय रामचंद्र कापरेकर (१९०५-१९८६) या देवळालीतील एका शिक्षकाने केलं आहे. त्यांचे अंकशास्त्रातील (नंबर थिअरि) कार्य आंतरराष्ट्रीय स्तरावर वाखाणलं गेलं आहे. डेम्लो संख्या आणि *कापरेकर स्थिरांक (कापरेकर कॉन्स्टण्ट)* म्हणजेच संख्या *६१७४* यांचा शोध त्यांच्या नावावर आहेत[१]. आजही जगभर याबद्दल संशोधन सुरू आहे हे विशेष. कापरेकरांनी याशिवाय आकडेमोडीच्या अनेक सुलभ पद्धती विकसित केल्या. जादूई चौरस, आकृती कोडी, दत्तात्रय संख्या असे अनेक मनोरंजन करणारे गणिती शोध त्यांनी लावले. श्री. कापरेकर यांचं जीवन व गणिती कार्य यांचा परिचय डॉ. म. वि. डिंगणकर आणि प्राध्यापक स. पां. देशपांडे यांनी त्यांच्या दोन पुस्तकांत दिला आहे. (पहाः निवडक संदर्भ सूची पृ. क्र. १८३)

मनोरंजन करणाऱ्या गणिताला दर्जाने कमी लेखण्याचं मुख्य कारण म्हणजे त्यातून सर्वसाधारणपणे वापरता येईल अशी पद्धती मांडता येईल असं नाही. म्हणजेच परिस्थिती किंवा आकडे बदलले तर ती पद्धती वापरता येत नाही. अशा पद्धती गणिताला पुढे नेण्यास हातभार लावत नाहीत. काही प्रमाणात

हे खरं असलं तरी गणिती संकल्पनांचा प्रसार आणि अर्थ सर्वसामान्यांना समजावण्यास मनोरंजनात्मक गणित मोलाचं काम करतं.

म्हणूनच या गणिताचा अभ्यासही एका शिस्तीने करणं आवश्यक आहे. गणितातील उत्पत्ती किंवा पद्धती नीट आखणी करून मनोरंजक गोष्ट अथवा कोडं रूपात सादर करणं आणि उत्तर काढल्यावर त्याचं मूळ गणितातील बाबींशी संबंध जोडून दाखवणं महत्त्वाचं असतं. काही वेळा मनोरंजनात्मक गणित हे औपचारिक गणिती पद्धतीच्या मर्यादा स्पष्ट करण्यास चांगलं साधन होऊ शकतं. त्यामुळे संशोधनास चालना मिळू शकते.

संगणकाचा वापर मनोरंजनात्मक गणिताच्या विकासाला पूरक ठरू शकतो. कारण अंक कोड्यामध्ये अनेक पर्याय शोधून त्यातून अचूक उत्तर मिळवावं लागतं. अशा शोधकार्यासाठी कम्प्युटर हे उत्तम साधन आहे. याशिवाय संगणकाद्वारे द्विमिती आणि त्रिमिती कोडी तयार करणं, रंग भरून आकर्षक करणं आणि संदर्भ लेख किंवा पुस्तकांशी जोडणं अशी अतिरिक्त कामं शक्य होतात. मात्र काही वेळा कम्प्युटर ही कोडी सोडवण्यास बाधकही ठरू शकतो. कारण त्याच्या प्रक्रियेमध्ये दशमलव संख्या पूर्ण संख्येमध्ये रूपांतरित करण्याचे नियम वेगळ्या प्रकारे वापरले जातात. त्याला rounding off किंवा truncation error म्हणतात.

बुद्धिबळ हा खेळ मनोरंजन गणितातील सर्वश्रेष्ठ पातळीवरील उत्पती मानली जाते. तिचा विकासही भारतातून सुरू झाला. याच्या प्रत्येक खेळीत प्रत्येक चाल आणि प्रतिचाल यांच्या शक्यता फार मोठ्या प्रमाणावर असू शकतात. त्याचं गणित मानवी मेंदू कसं करतो, हे कोडंच आहे. मात्र १९९७ मध्ये डीप ब्ल्यू टू हे सॉफ्टवेअर असलेल्या कम्प्युटरने जगातले सर्वोत्तम बुद्धिबळपटू गॅरी कॅस्पेरॉव्ह यांच्यावर विजय मिळवला. याचा अर्थ असा नव्हे, की कम्प्युटर माणसापेक्षा बुद्धिमान झाला. कम्प्युटरची पर्याय शोधण्याची गती माणसापेक्षा अनेक पटीने वाढल्यामुळे तो विजयी झाला.

गणिताच्या कोणत्याही अभ्यासक्रमात मनोरंजनात्मक गणित शाखेचा समावेश आढळत नाही किंवा उल्लेखही नाही, ही वस्तुस्थिती आहे. मात्र गणित शिकवताना त्याचा आधार घेतला जातो हेही तितकंच खरं आहे. Recreational Mathematics या विषयाला वाहिलेली अनेक जर्नल्स आणि नियतकालिकं उपलब्ध आहेत. त्यांना भरपूर प्रमाणात प्रतिसाद मिळतो.

म्हणजेच मनोरंजनात्मक गणित हे मुख्य गणित विषयाच्या परिधावर असलं, तरी त्याचं महत्त्व आणि उपयुक्तता मोलाची आहे. म्हणूनच विद्यार्थी आणि संशोधकांनी फक्त विरंगुळा असं न मानता मनोरंजनात्मक गणिताचा वापर संकल्पनांचा अर्थ समजावून घेणे आणि त्यांतील पद्धतींना औपचारिक रूप देणं यासाठी केला पाहिजे. तसंच याबाबत संगणकाचा वापर कसा वाढवता येईल, यासाठीही प्रयोग केले पाहिजेत. या सर्वांचा फायदा गणितातील अजूनपर्यंत अनुत्तरित राहिलेले प्रश्न सोडवण्यास होईल, असं वाटतं.

---

१. कापरेकर स्थिरांक प्राप्त करण्याची पद्धतीः

१) एक चार अंकी संख्या घ्या, ज्यातील प्रत्येक अंक वेगळा असावा.

२) या संख्येतील अंकांना उतरत्या क्रमाने मांडून शक्य असलेली मोठ्यात मोठी संख्या व नंतर चढत्या क्रमाने मांडत शक्य असलेली छोट्यात छोटी संख्या तयार करा.

३) मोठ्या संख्येतून छोटी संख्या वजा करा.

४) जर उत्तर ६१७४ आले तर थांबा, अन्यथा या उत्तरावर वरील (२) व (३) प्रमाणे प्रक्रिया करा. शेवटी उत्तर ६१७४ असंच येईल (जास्तीत जास्त सात वेळा ही प्रक्रिया करावी लागेल.)

उदाहरण, म्हणून ३१४२ ही संख्या घेऊया. यापासून प्राप्त मोठी संख्या = ४३२१ व छोटी संख्या = १२३४. त्यांची वजाबाकी केल्यावर उत्तर = ३०८७. यापासून निर्माण झालेली मोठी संख्या = ८७३० व छोटी संख्या = ०३७८. यांच्या वजाबाकीचे उत्तर = ८३५२. या उत्तरापासून प्राप्त मोठी संख्या = ८५३२ व छोटी संख्या = २३५८. यांच्या वजाबाकीचे उत्तर = ६१७४. यापुढे प्रक्रिया चालू ठेवल्यास ६१७४ हेच उत्तर येईल, म्हणूनच हा कापरेकरांचा स्थिरांक.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्र पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आले आहे व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

दत्तात्रय रामचंद्र कापरेकर - mobilnyportal.pl

१४

वैदिक गणित

+× ∑ ∫

आपल्या रोजच्या व्यवहारातील अनेक गोष्टींचा उल्लेख किंवा संदर्भ पुरातन ग्रंथांमध्ये आढळतो. गणितही त्याला अपवाद नाही. मात्र गणितासाठी स्वतंत्र वेदरचना आढळत नाही. पण वेदातील गणित सर्वश्रेष्ठ असा अनेकांचा समज आहे. फक्त असा अभिमान बाळगत बसण्यापेक्षा संशोधन करून हा विषय आणखी प्रगत करावयाला हवा.

वेद म्हणजे जगातील सर्वात प्राचीन ग्रंथ. त्यांची रचना अंदाजे इ.स. पूर्व १५०० वर्ष या काळात केली गेली. ते संस्कृत भाषेत श्लोकांच्या स्वरूपात आहेत. या ग्रंथाची रचना एका व्यक्तीने केली नव्हती. वेद म्हणजे ज्ञानाचे भांडार आणि या ज्ञानाचा उपयोग विविध क्षेत्रांत कसा करावा याबाबत मार्गदर्शन करणारे ग्रंथ आहेत, असं म्हटलं जातं. मांडणी आणि रचनाशैली यावरून वेदांची रचना करणाऱ्यांची असामान्य बुद्धिमत्ता आणि चिंतनाची प्रचंड व्याप्ती सिद्ध होते.

चिकित्सा (आयुर्वेद), धनुर्विद्या (धनुर्वेद) आणि संगीत (गांधर्ववेद) यांसाठी वेदांची खास निर्मिती करण्यात आली, तशी गणितासाठी वेगळी

वेदरचना उपलब्ध झालेली आढळत नाही. गणिताच्या संकल्पना आणि पद्धतीबाबत वेदात उल्लेख आहेत, पण ते विखुरलेले आहेत. मुख्य म्हणजे त्या सर्व कल्पना आणि भाष्य शब्दांत मांडलेलं असून सहजपणे लक्षात येणं शक्य नाही.

पुरी इथल्या मठाचे शंकराचार्य स्वामी श्री भारतीकृष्ण तीर्थजी महाराज (१८८४-१९६०) यांनी वेदांचा बारकाईने अभ्यास करून गणिताचं ज्ञान एकत्रित करण्याचा प्रयत्न केला. त्यांच्याकडील अथर्ववेदाच्या प्रतीतील परिशिष्टात याबाबत त्यांना अनेक संदर्भ सापडले, असं म्हटलं जातं. १९११ ते १९१८ या काळात त्यांनी वेदग्रंथात अशा प्रकारे दडलेल्या सर्व माहितीचा शोध घेऊन चिंतन आणि मनन केलं. त्या आधारे त्यांनी गणिती पद्धती वापरण्यासाठी १६ सूत्रं आणि त्यांची १३ उपसूत्रं तयार केली. या सर्व रचना संस्कृत भाषेत असून अतिशय त्रोटक स्वरूपात आहेत. स्वामीजींनी प्रत्येक सूत्रासाठी एक स्वतंत्र खंड, अशा १६ खंडाची रचना केली होती असं म्हटलं जातं. पण ते नष्ट झाले आहेत. विकसित केलेल्या वेगळ्या प्रकारच्या गणिती पद्धतीबाबत त्यांनी अनेक व्यक्तींशी चर्चा केली होती. देशात आणि परदेशात त्यांनी अनेक व्याख्यानं दिली होती. त्यांच्या पद्धतींतील नावीन्यता आणि काही बाबतीतील सोपेपण नावाजला गेला आहे.

ही सूत्रं आणि त्यांचा उपयोग कसा करायचा हे विशद करणारे फक्त एक पुस्तक त्यांच्या मृत्यूनंतर, १९६५ मध्ये *'Vedic Mathematics'* या नावाने दिल्ली इथल्या मोतीलाल बनारसीदास प्रकाशनाने प्रसिद्ध केलं. वेदातील श्लोकांचा आधार घेऊन संक्षिप्त सूत्रांद्वारे गणितातील अनेक प्रकारची आकडेमोड तोंडी पद्धतीने सोपी करणं हा स्वामीजींचा मुख्य हेतू होता. म्हणूनच या पुस्तकाला *वैदिक गणित* असं नाव दिलं गेलं. ही सूत्रं म्हणजे वेदातील गणिताबाबतचं ज्ञान मानावं, असा सूर पुढे निघाला.

उपरोक्त पुस्तकामध्ये मोठे गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ आणि घनमूळ, समीकरणं आदी गणितीप्रक्रियांसाठी अंकगणित आणि बीजगणितातील सध्या प्रचलित पद्धती आणि स्वामीजींच्या सूत्रांवर आधारित पद्धतींच्या आधारे गणितं सोडवून दाखवली आहेत.

या नवीन पद्धतीने वेळ आणि आकडेमोडीची बचत कुठे आणि कशी होते याची विस्ताराने तुलना केली आहे. सवय नसल्यामुळे साहजिकच नवीन पद्धत कठीण आणि स्मरणशक्तीला ताण देणारी आहे, असं वाटतं. पण सराव

केल्यास ही बाब दूर होऊ शकते. इथे लक्षात घेतलं पाहिजे, की पूर्वापार भारतातील ज्ञान वाटप आणि ग्रहण करणं यासाठी मौखिक पद्धत आणि पाठांतर यांवर जास्त भर दिला जात असे. स्वामीजींनी सूत्रांचा वापर याच धरतीवर गणितं सोडवण्यासाठी व्हावा, अशी योजना केलेली आढळते.

सदर गणिती पद्धतींना वैदिक गणित मानायचं का याबाबत मतभेद असले, तरी या पद्धतीने प्रचलित पद्धतींना पर्याय मिळतो आणि त्यांचा अभ्यास बोधक ठरू शकतो. त्या दृष्टीने वैदिक काळातील इतर अनेक ग्रंथ तसंच त्यानंतरच्या काळातील खगोलशास्त्र आणि गणिताबाबतच्या साहित्याचा अभ्यास उपयुक्त ठरेल. अनेक प्रकारची शस्त्रं, अस्त्रं, विमानरचना आणि दूरदर्शन यांबद्दलचे उल्लेख ज्या ग्रंथात आहेत, त्यांचा सखोल संशोधनात्मक आणि विश्लेषणात्मक अभ्यास त्या पद्धती कशा प्रकारे कार्यान्वित होत होत्या यावर प्रकाश टाकू शकेल.

गणिताचा आता प्रचंड विस्तार झाला आहे. अनेक अमूर्त संकल्पना आणि संरचना यांनी गणिताचं विश्व भरलं आहे. त्यांतील कित्येक कल्पना आणि रचनांचा भौतिक जगाशी काहीही संबंध नाही. त्याचबरोबर गणितात अजूनही अनेक प्रमेयं आणि भाकितं (conjuctures) यांच्या वैधतेबाबत निर्णय घेणं शक्य झालेलं नाही. वैदिक किंवा प्राचीन भारतीय गणितज्ज्ञांनी याबाबत काही विचार मांडले आहेत का, काही वैचारिक बैठक किंवा दिशा सूचवल्या आहेत का, याचा अभ्यास व्हायला पाहिजे. अर्थातच त्यासाठी संस्कृत भाषेचं उत्तम ज्ञान आवश्यक ठरणार आहे.

आजच्या युगात आकडेमोडीसाठी कम्प्युटरची मदत होते. मात्र कम्प्युटरच्या रचनेला पोषक असं गणित सर्वसाधारण आकडेमोडींच्या गणितापासून वेगळं आहे. वैदिक गणितामध्ये याचा काही उल्लेख आहे का, हे तपासयाला हवं. तसंच वैदिक गणितातील संकल्पनांद्वारे कम्प्युटर काम करू लागल्यास त्याची क्षमता वाढेल का याबाबतही संशोधन करता येईल.

मनुष्याने सतत ज्ञानात नवीन भर घालण्याचा प्रयत्न करत राहावा हे तत्त्व वेद आणि आपल्या इतर प्राचीन ग्रंथांचा मुख्य संदेश आहे. याबाबत काही मार्गदर्शक सूत्रं त्या साहित्यात मांडली गेली. त्यांचा अर्थ नीट समजून घेऊन आणि सध्याच्या परिस्थितीशी सांगड घातल्यास पुढील विकासास वेगळी दिशा देणं कदाचित शक्य होईल. गणित असो किंवा दुसरा कुठलाही विषय, त्यात काही भर घालण्यासारखं उरलेलं नाही असं मानण्यास कोणताही आधार नाही.

असा दृष्टिकोन मानव समाजाच्या उत्कर्षास बाधक ठरत आला आहे, हे आपण विसरता कामा नये. म्हणूनच वेदातील किंवा प्राचीन गणिती पद्धती सर्वश्रेष्ठ असं म्हणत राहण्यात फारसा अर्थ नाही. गरज आहे, ती त्या गणिती ज्ञानात भर घालण्याची आणि आधुनिक गणिताच्या अनेक शाखांशी त्याचा संबंध जोडण्याची. वैदिक गणितात संशोधन करणाऱ्या व्यक्तींनी आणि संस्थांनी अशा प्रकारचा कार्यक्रम हाती घेणं उपयुक्त ठरेल.

✤

१५

क्रीडा-जगतात गणित

+× ∑ ∫

अलीकडच्या काळात इंग्लंडविरुद्ध झालेल्या एका सामन्यात भारताने डकवर्थ-लुईस नियमाप्रमाणे विजय मिळवला. गणिताचा आधार घेऊन खेळातले असे अनेक नियम तयार करण्यात आले आहेत. हे नियम हारजीत ठरवतात. केवळ हारजीतच नाही, तर खेळाचं स्वरूप ठरवण्यासाठीही गणिताचीच मदत घ्यावी लागते.

गणित आणि क्रीडाजगताचा अतूट आणि अत्यंत जवळचा संबंध आहे. याचं मुख्य कारण म्हणजे पत्ते, कॅरम, सापशिडी यांसारखे बैठे खेळ किंवा बास्केटबॉल, क्रिकेट आणि हॉकी यांसारखे मैदानी खेळ असो, त्यांतील हारजीत ठरवण्यासाठी अंकांचीच (स्कोअर) मदत घ्यावी लागते. खेळांची मांडणी आणि प्रक्रिया यातही गणिताचाच वापर केला जातो. उदा. क्रिकेटची खेळपट्टी, बॅडमिण्टन कोर्टचा आकार आणि धावण्याच्या शर्यतीचे ट्रॅक्स या सर्वांच्या लांबी, रुंदी आणि इतर सर्व बाबी अचूकपणे अंकातच मांडाव्या

लागतात. यामुळे खेळाला एक निश्चितपणा येतो आणि प्रमाणभूत आधार (standard) मिळतो.

काही अपवाद वगळता बहुतेक सर्व खेळ आता व्यावसायिक स्तरावर खेळले जातात. त्यामुळे यात अतिशय तीव्र स्पर्धा आली आहे. टीव्ही आणि इतर प्रसार माध्यमांमुळे खेळ फक्त करमणुकीच्या साधनापुरता मर्यादित राहिलेला नसून, आंतरराष्ट्रीय स्तरावरची व्यावसायिक आणि प्रचंड आर्थिक उलाढालीची प्रक्रिया झाली आहे. अर्थातच ऑलिम्पिक गेम्स, क्रिकेट किंवा फुटबॉल वर्ल्ड कप यांसारख्या खेळांच्या मोठ्या स्पर्धांचं आयोजन करताना अनेक वर्षं आधीपासून तयारी करावी लागते. केवळ तेवढंच नाही. तर क्रीडा-संकुलात प्रेक्षकांच्या बसण्याची क्षमता यापासून शहरातील वाहतूकव्यवस्था अशा अनेक गोष्टींचं गणित संयोजकांना आखावं लागतं. तसंच सर्व संकुलाची उभारणी वेळापत्रकानुसार करणं आवश्यक असल्यामुळे प्रोजेक्ट मॅनेजमेण्टच्या पर्ट आणि सीपीएम (PERT and CPM) या गणिती पद्धतींचा भरपूर उपयोग कन्स्ट्रक्शन कंपन्यांना करावा लागतो. त्याचबरोबर विमा कंपन्यांना खेळात किंवा संपूर्ण स्पर्धेमध्ये काही समस्या येण्याची शक्यता किती आहे याचं गणितही मांडावं लागतं.

खेळांच्या विविध पैलूंचं गणित विविध प्रकारचं असतं. उदा. टेनिसमध्ये खेळाडूंची त्यांच्या कामगिरीनुसार जागतिक क्रमवारी महत्त्वाची ठरते. कारण त्यानुसार स्पर्धेचं आयोजन करणं सोयीचं असतं. तसंच यामुळे प्रायोजकांना खेळाडूंना स्पॉन्सर करण्याचा निर्णय घेण्यास मदत होते. ही क्रमवारी ठरवण्याची पद्धत क्लिष्ट गणितरूपी असते, कारण स्पर्धेचा दर्जा, खेळाडूंची जिंकण्याची पद्धत, इतर स्पर्धकांची क्रमवारी असे अनेक घटक विचारात घ्यावे लागतात. अर्थातच कम्प्युटरमुळे हे गुतांगुतीचं गणित सोडवणं सोप जातं. जगात कुठेही अशी अधिकृत स्पर्धा झाली की ही क्रमवारी अद्ययावत केली जाते. बुद्धिबळापासून कार रेसपर्यंत सर्वच खेळांमध्ये या प्रक्रिया वापरण्यात येतात.

खेळ अधिक आकर्षक करण्यासाठीही गणिताचा वापर मुबलक प्रमाणात केला गेल्याचे आढळते. उदा. आतंरराष्ट्रीय एक दिवसीय क्रिकेट सामन्यात पाऊस किंवा इतर काही कारणांमुळे व्यत्यय आल्यास डकवर्थ-लुईस फॉर्म्युला वापरला जातो. हा फॉर्म्युला काही प्रमाणात किचकट किंवा असंतुलित असला तरी खेळातील रंगत नक्कीच वाढवतो. टेनिसमध्ये टाय-ब्रेकरचा नियम

अंकगणितावर आधारित आहे. यामुळे खेळ फार वेळ लांबत नाही आणि उत्सुकता टिकून राहते. या प्रकारे प्रत्येक खेळाचे नियम वेळोवेळी तपासण्यासाठी गणिती मॉडेल्सचा वापर केला जातो आणि त्यानुसार बदल सुचवले जातात.

रेकॉर्डस्‌ची नोंद तसंच अशा आकडेवारीचं खेळातील महत्त्व अनन्यसाधारण आहे. त्यांच्या विश्लेषणातून विविध प्रकारची आणि मनोरंजनात्मक माहिती मिळते. उदा. सर डॉन ब्रॅडमन यांनी त्यांच्या शेवटच्या कसोटी सामन्यामध्ये चार धावा काढल्या असत्या, तर क्रिकेट कसोटी सामन्यामधील फलंदाजीची त्यांची सरासरी शंभर झाली असती.

खेळाडू तसंच त्यांचे प्रशिक्षक यांना आपल्या आणि प्रतिस्पर्धी खेळाडू आणि संघाच्या कामगिरीची अपडेटेड आकडेवारी आणि तिचा अर्थ फार महत्त्वाचा ठरतो. प्रशिक्षणाचा कार्यक्रम ठरवणं, संघाची निवड आणि सामन्याचे डावपेच आखणं या सर्व बाबतीत गणितावर आधारित विश्लेषण मार्गदर्शक ठरतं. स्टॅटिस्टिक्स आणि ऑपरेशन्स रिसर्च या गणिताच्या मुख्य शाखांची यासाठी फारच मदत होते. उदा. गेम थिअरि या ऑपरेशन्स रिसर्चच्या उपशाखेचा वापर आपल्या खेळाची रणनीती आणि धोरणं आखण्यास उपयोगी ठरते. लिनिअर प्रोग्रामिंगमधील Assignment Model चा वापर रिले रेस तसंच पोहण्याच्या medley रिले रेसमध्ये खेळाडूंची योग्य अशी क्रमवार रचना लावण्यास उपयुक्त आहे.

खेळाडूंचा आहार, दिनचर्या यांचा परिणाम त्यांच्या कामगिरीवर कसा होतो हे पाहण्यासाठी स्टॅटिस्टिक्समधील रिग्रेशन ॲनालिसिस (Regression Analysis) चा आधार घेतला जातो. यानुसार त्यात केव्हा आणि कसे बदल करावेत याबाबत दिशा मिळते. कुस्ती, बॉक्सिंग, स्विमिंग, ॲथलेटिक्स यांमधील खेळाडूंना ही माहिती फार महत्त्वाची ठरते.

या सर्व खेळांमध्ये हारजीत आणि इतर निर्णय घेण्याची जबाबदारी पंचांची असते. यावरूनच खेळाडूंच्या कामगिरीचं मूल्यांकन ठरतं. फेन्सिंग, स्केटिंग आणि जिम्नॅस्टिक्स यांसारख्या खेळांमध्ये पंचांनी केलेलं निरीक्षण आणि गुणात्मक मोजमाप या आधारे निर्णय घ्यावा लागतो, त्या वेळी एकाहून अधिक पंचांची मतं तपासून बघावी लागतात. अर्थातच अशा सर्व मतांना एकत्र करून सर्वमान्य निर्णय घ्यायचा हा नाजूक प्रश्न ठरतो. यासाठी multi-criteria decision models या गणिती पद्धतींचा वापर केला जातो.

क्रीडा जगतातील सर्व उलाढालींसाठी गणिताचा उपयोग सातत्याने होतो. त्यामुळे क्रीडा-सांख्यिकी (Sports Statistician) ही करिअरसाठी नवीन शाखा विकसित होत आहे. स्टॅटिस्टिक्स आणि खेळात रस असणाऱ्यांना या क्षेत्रात चांगल्या संधी उपलब्ध आहेत. मात्र याच गणित व सांख्यिकीचा वापर मोठ्या प्रमाणात क्रीडा सामन्याबाबत अनेक प्रकारे बेटिंग अर्थात जुगारासाठी केला जात आहे आणि त्याचे अनिष्ट परिणाम दिसून येत आहेत. गणिताचा उपयोग कसा करायचा हे सर्वस्वी माणसावर अवलंबून आहे हे विसरता कामा नये.

✤

१६

अंकाचं अफाट विश्व

+×∑∫

रोजच्या वापरात मोजदाद करण्यासाठी योग्य प्रणाली विकसित करणं आवश्यक झालं. यामुळे अनेक प्रयत्नांनंतर अंक आणि त्यांची विशिष्ट मांडणी करून संख्या तयार झाल्या. शून्याची कल्पना मांडून भारतीय गणितज्ज्ञांनी याबाबतीत अमूल्य योगदान केलं आहे. अंकाच्या या अफाट विश्वात अंकशास्त्र (Number Theory) **ही निर्माण झालेली अशीच एक शाखा. अंकांच्या या अफाट विश्वाची ही ओळख...**

शाळा-कॉलेजच्या अभ्यासातून पूर्णांक (integer), अपूर्णांक आणि परिमेय किंवा गुणोत्तर (rational), अपरिमेय (irrational), वास्तव (real), संमिश्र (complex with real and imaginary parts) आणि अनुभवातीत (transcendental, उदा. π, e) अशा अनेक अंकांची आणि त्यांच्या मालिकांची ओळख करून दिली जाते. यावरून अंक आणि त्यांचे विविध प्रकार किती असू शकतात याची कल्पना येते.

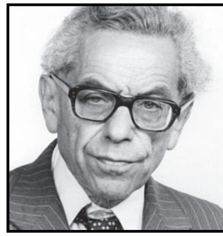
अंक हे अनेक वर्गवारीत मोडले जातात. उदाहरणार्थ, प्राइम नंबर (३,५,७ इत्यादी). यांना फक्त एक आणि स्वत: त्या संख्येनेच पूर्ण भाग जातो. परफेक्ट नंबर (६,२८ इत्यादी) यांना पूर्णपणे भाग देणाऱ्या संख्यांची बेरीज मूळ संख्येएवढी असते (१+२+३=६) अर्थातच स्वत:ला भाग देणारी संख्या इथे धरायची नसते. या दोन संख्या प्रकारांवर संशोधन सुरू आहे. उदाहरणार्थ, परफेक्ट नंबर शोधण्यासाठी काही सूत्र तयार करता येईल का? आतापर्यंत असे फक्त ३० अंक कम्प्युटरची मदत घेऊन शोधले गेले आहेत.

गोल्डबॅक (१६९०-१७६४) यांचं 'प्रत्येक दोन पेक्षा मोठी सम पूर्णांक संख्या दोन प्राइम संख्येची बेरीज असते' (जसे की १०० = ५३+४७), हे भाकित (conjecture) अजूनही पूर्णपणे सिद्ध झालेलं नाही. आतापर्यंत १०,००,००,००० या संख्येपर्यंतच्या सर्व सम संख्येसाठी हे विधान बरोबर ठरलं आहे. पण याचा अर्थ असा होत नाही, की यापेक्षा मोठ्या संख्येबाबतही ते बरोबर असेल.

या दोन उदाहरणांवरून अंकशास्त्रात किती प्रगती होणं बाकी आहे, याची कल्पना येते. आणखी एक नमुना म्हणजे सातव्या शतकातील भारतीय गणितज्ज्ञ ब्रह्मगुप्त यांनी $अ^{२} - ९२ब^{२} = १$ या समीकरणाचं पूर्णांकात उत्तर काढून दाखवणं हे आव्हान मांडलं होतं. संगणकाच्या मदतीशिवाय हे अशक्यप्राय आहे. याशिवाय triangular number, amicable number, undualating number, palindrome number असे असंख्य प्रकारचे अंक शोधले गेले आहेत. त्यांना विशिष्ट असे गुणधर्म आहेत. उदाहरणार्थ, *१७२९* ही संख्या भारतीय असामान्य गणितज्ज्ञ रामानुजन (१८८७-१९२०) यांच्या नावाने म्हणजे *'रामानुजन नंबर'* म्हणून ओळखला जातो. (पहिला असा अंक जो की दोन वेगळ्या संख्येच्या घनांची बेरीज म्हणून दोन प्रकारे मांडता येतो, $१७२९ = १०^{३}+९^{३} = १२^{३}+१^{३}$). या प्रकारचे किती अंक आहेत आणि ते शोधण्याचा सोपा मार्ग कोणता या प्रश्नाचं उत्तर अजून मिळालेलं नाही. या विषयाच्या अधिक माहितीसाठी सी. ए. पिकोव्हर यांचं (C.A.Pickover, *Wonders of Numbers,* Oxford University Press, 2001) हे पुस्तक मार्गदर्शक ठरू शकतं.

अंकशास्त्र हे मनोरंजनात्मक गणिताचा भाग बनत चालला आहे, असा काही वेळा समज होतो. पण वस्तुस्थिती अशी नाही. अंकशास्त्राचा गंभीर अभ्यास आणि संशोधन जगात सुरू आहे. आपण सर्वसामान्यपणे संख्या

दशमान पद्धतीने हाताळतो. पण कम्प्युटरच्या तांत्रिक संरचनेसाठी द्विमान (binary) पद्धतीने अंक हाताळणं योग्य ठरतं. या मूलभूत फरकामुळे अंकशास्त्राला नवीन दालन उपलब्ध झालं. अशा इतर गणिती अंक पद्धती वापरताना येणारे प्रश्न सोडवणं हे एक आव्हानच आहे. त्यासंदर्भात Computer Arithmetic आणि Computational Mathematics अशा गणिताच्या खास उपशाखा निर्माण झाल्या आहेत.


पॉल एरडॉश

अंकशास्त्राबद्दल बोलताना या विषयाला संपूर्ण आयुष्य वाहिलेले हंगेरीयन गणितज्ञ पॉल एरडॉश (१९१३-१९९६) यांचा उल्लेख इथे करायला हवा. त्यांनी १५०० हून अधिक शोधनिबंध लिहिले आहेत. त्यातील अनेक निबंध ६० हून अधिक नोबेल पारितोषिक विजेत्यांबरोबर सहलेखित आहेत. यावरून त्यांच्या कामाचा दर्जा आणि विविधतेची कल्पना येते. आयुष्यातील शेवटची ५० वर्षं अमेरिका आणि युरोपमधील विद्यापीठांना भेटी देऊन तिथल्या गणितज्ज्ञांना मार्गदर्शन आणि प्रोत्साहन देत त्यांच्याबरोबर संशोधन करत राहण्याचं काम त्यांनी केलं. ४५०० हून अधिक व्यक्तींनी त्यांच्याबरोबर संशोधन आणि लेखन केलं आहे. प्रश्नाकडे बघण्याची वेगळीच दृष्टी आणि सुटसुटीत प्रभावी गणिती पद्धती विकसित करणं ही त्यांची हातोटी होती. वयाच्या ८३ व्या वर्षी वॉर्सा, पोलंड इथल्या गणिताच्या परिसंवादात व्यग्र असताना हृदयविकाराच्या झटक्याने त्यांचा मृत्यू झाला.

अंकांकडे दुसऱ्या दृष्टिकोनाने बघणं आणि वापर करणं हा विचार स्टॅटिस्टिक्स या गणितसंलग्न विषयाद्वारे विकसित झाला. नैसर्गिक तसंच मानवी आयुष्यातील असंख्य बाबी गणितातील सूत्रांचा वापर करून ठामपणे काढता येणं शक्य नाही हे लक्षात आल्यावर या घटना कशा किंवा कुठे घडतील इत्यादी शक्यता वर्तवणं हे महत्त्वाचं ठरलं. त्यासाठी प्रोबेबिलिटी थिअरि (probability theory) आणि त्यावर आधारित मॉडेल्स आणि पद्धती यांची रचना होत होत स्टॅटिस्टिक्स विषयाचा वेगाने विकास झाला. या विषयाची व्यवहारातील उपयुक्तता वाढत गेल्यामुळे त्याच्याही अनेक शाखा आणि उपशाखा निर्माण होत आहेत.

वित्तीय उलाढाल, खेळ, युद्ध असो किंवा शाळा चालवणं असो, प्रत्येक ठिकाणी अंकांची मदत आणि त्यांचा अर्थ काढायची गरज भासते. म्हणून

अंकशास्त्रातील संशोधन फक्त मूलभूत (basic or fundamental) या स्वरूपाचं राहिलं नसून उपयोजिता (applied) या उद्देशाने केलं जातं आणि त्याला चांगलीच मागणी आहे. कम्प्युटरमुळे या प्रकारच्या संशोधनाला वेगळीच कलाटणी मिळाली आहे. त्यामुळे अंकशास्त्रात फक्त शिक्षकी पेशापुरताच वाव आहे हा गैरसमज दूर करायला हवा. इतर अनेक करिअरसाठीही अंकशास्त्रातील संशोधन आणि ज्ञान उपयुक्त ठरेल हे विसरून चालणार नाही.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्र पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आले आहे व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

पॉल एरडॉश - *www.wolffund.org.il*

१७

गणितातील करिअर

+× ∑ ∫

वाढता पसारा आणि वेगवेगळ्या क्षेत्रांत होणारा गणिताचा सखोल वापर यामुळे गणितात विविध प्रकारच्या करिअरच्या संधी उपलब्ध होत आहेत. त्यामुळे शिक्षक आणि संशोधक या पारंपरिक व्यवसायांव्यतिरिक्त अनेक वाटा या विषयात निर्माण झाल्या आहेत. या दृष्टीने गणित तसंच गणिताशी संलग्न विषयात किमान पोस्टग्रॅज्युएशन पूर्ण असायला हवं. तुमच्याकडे एम. फील. किंवा पीएच.डी. अशी पदवी असल्यास या क्षेत्रात करिअर करताना निश्चितच अधिक फायदा होतो.

गणित आणि त्याच्या अनेक शाखा नवीन संधी प्रदान करत आहेत. इथे आपण या क्षेत्रात असणाऱ्या करिअरच्या संधीबद्दल चर्चा करणार आहोत. गणितात करिअर करण्यासाठी पुढील विषय उपलब्ध आहेत:

- गणित (प्युअर किंवा अप्लाइड)
- संख्याशास्त्र किंवा सांख्यिकी (स्टॅटिस्टिक्स)
- ऑपरेशन्स रिसर्च

- कम्प्युटर सायन्स
- ॲक्च्युरिअल सायन्स
- डेमोग्राफी किंवा पॉप्युलेशन स्टडीज

या विषयांत पोस्ट ग्रॅज्युएशन किंवा एम. फील./पीएच.डी. करून आपलं करिअर चांगल्या प्रकारे करता येणं शक्य आहे.

या विषयांचा अभ्यास टाटा मूलभूत संशोधन संस्था, आयआयटी, इंडियन इन्स्टिटय़ूट ऑफ सायन्स, इन्स्टिटय़ूट ऑफ पॉप्युलेशन स्टडीज अशा अनेक नामांकित संस्थांमधून करता येईल. अर्थातच या संस्था देशातील प्रस्थापित आणि नामांकित युनिव्हर्सिटींव्यतिरिक्त आहेत. या विषयाचा अभ्यास करू इच्छिणाऱ्यांनी या संस्थाच्या वेबसाइटच्या माध्यमातून उपलब्ध स्पेशलायझेशनची माहिती मिळवावी. तसंच तज्ज्ञ प्राध्यापकांशी संपर्क साधावा.

गणित शिकवण्याची आवड असणाऱ्यांसाठी शिक्षक होण्याचा पर्याय आहे. पण त्यासाठी बी. एड. आणि एम. एड. तसंच ‘नेट’, ‘सेट’ ही परीक्षा पास होणं आवश्यक आहे. परदेशात गणित शिकवणाऱ्या शिक्षकांची कमतरता भासत असल्याने अनुभवी भारतीय शिक्षकांना नोकरीच्या संधी उपलब्ध आहेत. याशिवाय खासगी शिकवण्या हा पर्यायही आहे.

गणितात संशोधन करून करिअर करायचं असल्यास पीएच.डी. पदवी मिळवावी लागते. त्यासाठी शक्य असल्यास संशोधनास पूर्ण वेळ द्यायला हवा. त्यासाठी उपलब्ध स्कॉलरशिप (यूजीसी, सीएसआयआर आदी संस्थांच्या) मिळवण्याचा प्रयत्न करता येईल. ते शक्य नसल्यास नोकरी सांभाळून अधिकाधिक वेळ संशोधनासाठी द्यायला हवा. गणितात रिसर्च करताना चांगलं आणि अद्ययावत ग्रंथालय आणि संगणक सुविधांची गरज असते. म्हणूनच अशा सुविधा प्राप्त होतात का ते पाहायला हवं. गणितातील नावीन्यपूर्ण आणि दर्जेदार संशोधन सहसा तरुण वयोगटात (२५ ते ४५ वर्षं वयोगटात) होत असल्याचं आढळतं.

गणितात पीएच.डी. केलेल्या आणि संशोधक वृत्ती असणाऱ्यांना करिअरच्या जास्तीतजास्त संधी संरक्षण खात्यातील संस्थेत मिळतात. भारतात नाही, तर संपूर्ण जगभरात ही परिस्थिती दिसून येते. आपल्या देशातही डिफेन्स रिसर्च ॲण्ड डेव्हलपमेण्ट ऑर्गनायझेशन, इंडियन स्पेस रिसर्च ऑर्गनायझेशन, सर्व्हे ऑफ इंडिया आदी संस्था गणितज्ज्ञांच्या सतत शोधात असतात.

त्याशिवाय इंडियन ॲग्रिकल्चर रिसर्च इन्स्टिट्यूट, नॅशनल सॅम्पल सर्व्हे आणि इंडियन स्टॅटिस्टिकल सर्विस असे अनेक पर्याय गणित आणि संलग्न विषयाचं ज्ञान असणाऱ्यांना उपलब्ध आहेत. या संस्थांमध्ये योग्य त्या उमेदवारांची नेमणूक दरवर्षी यूपीएससीतर्फे (UPSC) करण्यात येते. इतर सर्व स्पर्धात्मक परीक्षेतही गणितातील अर्हता उपयोगी ठरते.

काही अपवाद वगळता गणिती शास्त्र आणि पद्धतींचा उपयोग इतर विषयांमध्ये करण्याचं प्रमाणही हल्ली वाढत आहे. काही विषयांचा गणिताशी फार घनिष्ठ संबंध आहे. फिजिक्स, इकॉनॉमिक्स, सायकॉलॉजी, हवामानशास्त्र, इन्फर्मेशन सायन्स तसंच इंजिनीअरिंगच्या सर्व शाखा आणि लाइफसायन्स आदी क्षेत्रांतही गणिती आणि सांख्यिकी पदवीधरांसाठी खास पदं निर्माण करण्यात येत आहेत. त्यामुळे गणिताबरोबरच या विषयांचा अभ्यास करून अधिकाधिक संधी मिळवण्याचा प्रयत्न विद्यार्थ्यांना करता येईल. या शिवाय आता सर्वच क्षेत्रांत इण्टर-डिसिप्लिनरी संशोधनावर भर वाढत जाणार आहे आणि त्यात गणिताचा वाटा महत्त्वाचा राहणार हे निश्चित.

उद्योग, व्यवसाय आणि सर्विस इण्डस्ट्रीतही सांख्यिकी आणि ऑपरेशन्स रिसर्च यांचा वापर फार मोठ्या प्रमाणात होऊ लागला आहे. एमबीए कोर्समध्ये या विषयांचा समावेश असला, तरी तपशीलवार हे विषय शिकवणं शक्य नसतं. त्यामुळे एमबीए व्यक्ती मॅनेजर झाली तरी तिला त्या विषयातील तज्ज्ञांची मदत घ्यावी लागते. म्हणूनच फायनान्शिअल मॉडेलिंग, प्रोजेक्ट मॅनेजमेण्ट, गेम थिअरि अशा पद्धतींचा अभ्यास केल्यास कॉर्पोरेट जगतातही महत्त्वाचं पद मिळवता येतं. अशा कामाचा अनुभव असलेल्या व्यक्ती पुढे स्वतंत्ररित्या कन्सल्टिंग बिझनेस सुरू करू शकतात.

भारतात आता विमाक्षेत्र सर्वांसाठी खुले होत आहे. त्यामुळे विमाक्षेत्रातील पदवी (Actuary) फार महत्त्वाची होत जाणार आहे. गणित आणि संख्याशास्त्राचं ज्ञान असणाऱ्यांनी ही डिग्री जरूर मिळवावी. अधिक माहितीसाठी www.actuariesindia.org या वेबसाइटला भेट देता येईल.

तर्कसंगत विचार करणं आणि एका शिस्तीत पद्धतींचा वापर करणं यांवर गणिती शिक्षणाचा भर असतो. म्हणूनच या विषयात रस आणि मेहनत घेऊन पदवी प्राप्त करणाऱ्यांना अनेक पर्याय उपलब्ध होतात. गणिताची चांगली पाठ्यपुस्तकं आणि दूरशिक्षण कोर्सेससाठी वाचनसामुग्री तयार करणं हा पर्यायही आता निर्माण होत आहे. गणित आणि कम्प्युटर यांच्या जोडीने

असंख्य प्रयोग करता येणं शक्य आहे. त्यातील अनेक प्रयोग व्यावसायिकदृष्ट्या विकसित करता येतील. एकंदरच काय, तर गणितात करिअरच्या अनेक संधी आहेत. भारतीय गणितज्ज्ञांची भरीव कामगिरी लक्षात घेता इथे चांगलं करिअर निश्चितच करता येणं शक्य आहे.

✤

१८

गणितातील प्रमुख कार्यपद्धती

+× ∑ ∫

बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार यांबरोबरच सूत्रांचा वापर करून व्याज/क्षेत्रफळ/आकारमान काढणं अशा अनेक प्रक्रिया आपल्याला माहिती आहेत. भूमिती आणि त्रिकोणमितीमधील प्रमेयं सिद्ध करण्यासाठी काही विशिष्ट मुद्देसूद प्रकारे मांडणी केली जाते. शाळा-कॉलेजमध्ये आपण सगळेच हे शिकलो. पण या प्रक्रिया आणि पद्धती कशा विकसित झाल्या याचा फारसा विचार केला जात नाही. गणिताच्या शाखा आणि उपशाखा वाढल्यामुळे गणितातील या कार्यपद्धतींची संख्या वाढली आहे. या भागात आपण काही निवडक मूलभूत कार्यपद्धतींची चर्चा करणार आहोत.

निगमन पद्धती (Deduction Mathod) : या पद्धतीनुसार स्वयंपूर्ण गृहितकांची (axioms) रचना केली जाते. त्यांचा वापर करून प्रमेयं आणि सिद्धांत विकसित केले जातात. दिलेल्या गृहितकांपासून नवीन निष्कर्ष काढणं, हे निष्कर्ष सुसंगत (consistent) आणि तर्कशास्त्रानुसार बरोबर (logically valid) आहेत हे तपासणं अशा प्रकारे हे काम चालतं.

युक्लिड या ग्रीक गणितज्ज्ञाने भूमितीची रचना सुमारे तेवीसशे वर्षांपूर्वी हीच कार्यपद्धती वापरून केली. मात्र, त्याने योजलेल्या गृहितकांपैकी एक गृहितक (पाचवे) बरोबर आहे, की नाही यावर अनेक शतकं बरीच चर्चा आणि अभ्यास होत होता. १९ व्या शतकात रिमान (१८२६-१८६६), बोलाई (१८०२-६०) आणि लोबाश्वेस्की या गणितज्ज्ञांनी हे पाचवं गृहितक बदललं आणि वेगवेगळ्या प्रकारच्या भूमितीरूप संरचना करता येऊ शकतात हे सिद्ध केलं. अर्थातच अशा शक्यता खूप आहेत. त्यांना नॉन-युक्लिडीयन भूमिती (Non-Euclidean Geometries) असं म्हणतात. रिमान यांच्या या गणिती शोधामुळेच आइनस्टाइन यांना सापेक्षता सिद्धांत (theory of relativity) विकसित करण्यात मदत झाली. युक्लिडची भूमिती सपाट पृष्ठभागासाठी (plane surface) बरोबर आहे. पण इतर प्रकारच्या भूभागासाठी या भूमितीमध्ये इतर रूपांचा वापर करणं योग्य ठरतं. ही डिडक्शन कार्यपद्धती त्यामुळे उपयोगी ठरली आहे.[१]

विगमन पद्धती (Induction Method) : ही पद्धती निगमन पद्धतीच्या विरुद्ध रितीने काम करते. इथे एखादा निष्कर्ष सुरुवातीस आणि मधल्या एका स्थितीत बरोबर आहे असं मानलं आणि त्यावरून तो क्रमाने एक पुढे असलेल्या स्थितीसाठी बरोबर आहे हे सिद्ध केल्यास तो निष्कर्ष सर्व स्थितींसाठी बरोबर असेल असं गणितशास्त्रात मानण्यात येतं.

या पद्धतीचा उपयोग गणितातील अनेक सूत्रं विकसित करण्यासाठी होतो. उदाहरणार्थ, १,२,३,... अशा पहिल्या 'न' अंकांची बेरीज या सूत्राने काढणं शक्य आहे हे विगमन पद्धतीने सिद्ध करता येतं.

आपल्याला काढायचे उत्तर,

$$अ(न) = १+२+३+.....+ न = \frac{न\ (न+१)}{२}$$

'न'चं मूल्य १ असेल तेव्हा उत्तर बरोबर आहे असं वरील सूत्र दाखवतं. 'न'चं मूल्य जेव्हा 'क' असेल तेव्हाही हे सूत्र बरोबर आहे, असं मानूया, म्हणजेच

$$अ(क) = १+२+३+.....+ क = \frac{क\ (क+१)}{२}$$

आता आपण अ(क+१) = (क+१) (क+२)/२ असं सिद्ध करू शकलो, तर आपलं सूत्र 'न' च्या कोणत्याही मूल्यासाठी वापरता येईल, असा

निष्कर्ष काढता येईल. हे पुढीलप्रमाणे तपासता येईल:

$$अ(क+१) = अ(क) + (क+१) = \frac{क(क+१)}{२} + (क+१)$$

$$= \frac{(क+१)\ (क+२)}{२}$$

ही पद्धती साधी असली तरी तिचा वापर अनेक प्रकारे होतो. मुख्य म्हणजे सूत्र किंवा निष्कर्षांची वैधता तपासण्यासाठी ही विगमन पद्धती खूप उपयुक्त ठरते. काही वेळा या पद्धतीला बळकटी आणण्यासाठी सुरुवातीपासून मध्य स्थितीपर्यंत निष्कर्ष तपासून बघावा असं सुचवलं जातं. त्याला strong Induction म्हणतात.

विपरित निष्कर्षाची शक्यता नाकारणे (Reductio ad Absurdum): या पद्धतीत निष्कर्ष सिद्ध करण्यासाठी प्रथम तो नाकारायचा आणि त्याच्या विरुद्ध निष्कर्ष बरोबर आहे असं मानून पुढे त्या आधारे प्रक्रिया करून प्राप्त होणारं उत्तर गणिताच्या कुठल्यातरी सिद्धांताला छेद देतं हे दाखवून मूळ गृहितकाची वैधता स्थापित करायची अशा प्रकारे कार्य चालतं. उदाहरणार्थ, प्राकृतिक संख्या (natural numbers) या अनंत आहेत हे सिद्ध करण्यासाठी त्या 'क्ष' या अंकापर्यंत मर्यादित आहेत असं प्रथम मानायचं. पण (क्ष+१) ही संख्या प्राकृतिक संख्या असून 'क्ष' पेक्षा मोठी आहे हे लक्षात घेता आपलं गृहितक की प्राकृतिक संख्या मर्यादित आहे हे फोल ठरतं. त्यामुळे आपला मूळ निष्कर्ष–प्राकृतिक संख्या अनंत आहेत हे सिद्ध होतं. या पद्धतीचं दुसरं रूप म्हणजे एखादी अशी स्थिती निर्माण करणं ज्या योगे निष्कर्षाला छेद जाऊ शकतो. त्यामुळे निष्कर्षाची वैधता तपासता येते (Method of Contradiction).

परिवर्तन पद्धती (Tranformation Method): अनेकदा गणितातील काही प्रश्न किंवा समस्या त्यांच्या मूळ स्वरूपात सोडवणं सरळरित्या शक्य नसतं. अशा वेळी त्यांचं परिवर्तन किंवा रूपांतर दुसऱ्या पण संलग्न स्वरूपात करणं योग्य ठरतं. कारण त्या दुसऱ्या प्रश्नासाठी पद्धत काही वेळा उपलब्ध असते किंवा निर्माण करणं सुलभ असते. या पद्धतीचं उत्तम उदाहरण म्हणजे मॅथेमॅटिकल प्रोग्रामिंग या विषयात झालेल्या अन्योनता सिद्धांत किंवा ड्युयेलिटी थिअरि (Duality Theory) चा विकास. दिलेल्या कठीण अशा लिनिअर किंवा नॉन–लिनिअर प्रोग्रामिंग प्रश्नाचं रूपांतर संलग्न अशा Dual

Problem मध्ये करणं, जो की सोडवणं कमी कष्टाचं आहे ही त्यामागची भूमिका आहे. या संलग्न प्रश्नाचं उत्तर मूळ Primal Problem प्रश्नाचं उत्तर काढण्यास मदत करतं, हे विशेष. जॉमेट्रिक प्रोग्रामिंग या उपशाखेची सुरुवात या पद्धतीच्या आधारे झाली. त्यामुळे अनेक कठीण पण व्यवहारात उपयुक्त असे प्रश्न सोडवणं शक्य झालं.

सर्च पद्धती (Search Method): काही प्रश्नांसाठी गणिती सूत्रं निर्माण करणं शक्य नसतं. अशा वेळी शक्य असलेली सर्व उत्तरे किंवा पर्याय यांची मांडणी करणं आणि त्यातून सर्वोत्तम पर्याय शोधणं हा या पद्धतीचा गाभा आहे. लवकरात लवकर असं उत्तर कसं शोधता येईल, यावर सतत संशोधन सुरू असतं. कम्प्युटरचा वापर याबाबतीत कसा करता येईल हे शोधणं हा देखील अशा संशोधनाचा भाग आहे.

या पाच निवडक पद्धती गणिताच्या कोणत्याही शाखेत वापरता येतात. अशा प्रकारच्या नवीन पद्धती विकसित करणं हे देखील गणितज्ज्ञ आव्हान मानतात.

✤

---

१. भूमितीच्या विकासाची विस्तृत चर्चा प्रकरण ४१ मध्ये केली आहे.

१९

महत्त्व ० आणि १ यांचं !

+× ∑ ∫

माणसाप्रमाणे एका वेळी ० ते ९ असे दहा अंक हाताळणं यंत्राला शक्य होत नाही. यातून तंत्रज्ञानाची मर्यादा स्पष्ट होते. म्हणूनच संगणकाला कार्यक्षम बनवण्यासाठी मूळ अंकांची संख्या कमी असायला हवी. याबाबत संशोधन केल्यावर केवळ शून्य (०) आणि एक (१) या दोन अंकांनी अंकगणितातील सर्व प्रक्रिया पार पाडणं शक्य असल्याचं आढळून आलं आहे. म्हणजेच गणितात या दोन अंकांना खूप महत्त्व आहे.

बेरीज, वजाबाकी अशा प्रक्रिया करताना उत्तर हे पूर्णांक किंवा अपूर्णांक स्वरूपात येतं. त्यावर कोणतीही मर्यादा घातलेली नसते. याचं कारण म्हणजे अंकांनी तयार केलेल्या संख्या अनंतापर्यंत जाऊ शकतात. तसंच या सर्व प्रक्रिया दशमान/दशमलव पद्धतीने पार पाडल्या जातात.

पण गणिती आकडेमोडीसाठी कम्प्युटरसारख्या यंत्राचा विकास करताना यंत्राला ०,१,२,....,९ असे एकूण दहा अंक एकदम हाताळणं माणसाइतकं

सुलभ नसल्याचं लक्षात आलं. म्हणजेच तंत्रज्ञानाच्या मर्यादेत कम्प्युटरला कार्यक्षम बनवण्यासाठी मूळ अंकांची संख्या कमीतकमी असावी. याबाबत संशोधन केल्यावर आढळलं, की केवळ शून्य (०) आणि एक (१) या दोन अंकांनी अंकगणितातील सर्व प्रक्रिया पार पाडणं शक्य आहे. याची सुरुवात म्हणजे संख्येला दशमान पद्धतीतून द्विमान (binary) पद्धतीत बदलणं. उदाहरणार्थ, दशमान पद्धतीतील

$$(१०५)_{१०} = १\times१०^{२}+०\times१०^{१}+५\times१०^{०}$$

ही संख्या द्विमान पद्धतीमध्ये $(११०१००१)_{२}$ अशी मांडता येते. कारण

$$\begin{aligned}(११०१००१)_{२} &= १\times२^{६}+१\times२^{५}+०\times२^{४}+१\times२^{३}+०\times२^{२}+०\times२^{१}+१\times२^{०}\\ &= ६४+३२+०+८+०+०+१\\ &= (१०५)_{१०}\end{aligned}$$

ही परिमाण परिवर्तन (change of base) पद्धत कठीण वाटली तरी ती यांत्रिकी मार्गाने पार पाडणं सहज शक्य आहे. यामुळे संपूर्ण अंकगणित (०,१) या दोन अंकांनी उभारणं शक्य आहे. तसंच तर्कशास्त्रीय (लॉजिकली) प्रश्नांची उत्तरं (हो किंवा नाही या स्वरूपातील) त्यांना १ किंवा ० या पद्धतीने मांडता येणं शक्य आहे. अशा सर्व प्रक्रिया कम्प्युटर सहज करू शकतो. आधुनिक कम्प्युटरची संरचना या प्रकारे गणितातील प्राथमिक अशा शून्य आणि एक या दोन अंकांवर आधारली गेली. अर्थातच आता या पद्धतीचं प्रगत स्वरूप आधुनिक कम्प्युटरमध्ये वापरलं जातं. साहजिकच प्रश्न असा येतो, की एक आणि एक यांची बेरीज केली तर उत्तर दोन असं येतं. पण दोन ही संख्या (०,१) या व्यवस्थेमध्ये उपस्थितच होत नाही. याचं उत्तर असं, की द्विमान किंवा तत्सम परिणाम पद्धतीत बेरीज, गुणाकार अशा प्रक्रिया करण्यासाठी विशिष्ट पद्धती वापरतात. याला Modulo Arithmetic असं म्हटलं जातं. उदाहरणार्थ,

$$०+०=०,\quad ०+१=१,\quad १+०=१,\quad १+१=०$$

नियम असा आहे, की नेहमीप्रमाणे बेरीज करायची आणि दोन या संख्येने त्या उत्तराला भागायचं आणि बाकी राहील ते उत्तर. म्हणूनच १+१ चे उत्तर ० असं येतं. Modulo Arithmetic नियमांचा वापर आपण आठवड्याचे दिवस आणि वार मोजताना (७ ने भाग देणं) तसंच दिवसाचे तास मोजताना (१२ ने भाग देणं) करतो. ही कल्पना एका उदाहरणाने स्पष्ट होईल. आम्हा तिघा

भावांचे वाढदिवस कुठल्याही वर्षी एकाच वारी येतात. या जन्मतारखा आहेतः १७ मे, २५ ऑक्टोबर व २२ नोव्हेंबर. याला कारण म्हणजे या तारखांमधील दिवस मोजले व सातने त्या संख्येला भागले की उत्तर शून्य असे होते. म्हणजे १७ मे रोजी येणाराच वार त्यावर्षी २५ ऑक्टोबर व २२ नोव्हेंबरला येणार. 'लीप' वर्षाने देखील यात काही फरक पडत नाही.

अनेक गोष्टींना काही निष्कर्षाधारे क्रमवार पद्धतीने एका चौकटीत बसवण्यासाठी (०,१) या प्रणालीचा उपयोग करता येतो. इण्टरप्रीटीव्ह स्ट्रक्चर मॉडेलिंग (Interpretive Structure Modelling) अशी एक पद्धत या तत्त्वावर विकसित करण्यात आली आहे. तिचा वापर विविध क्षेत्रांत झाला आहे. समजा, आपल्याला १५ गोष्टी करायच्या आहेत. त्यांचा क्रम ठरवण्यासाठी एका वेळी कोणत्याही दोन गोष्टी विचारात घ्यायच्या आणि कोणती गोष्ट पहिली केल्यास जास्त फायदा होईल असा प्रश्न करायचा. उत्तर 'हो' आलं तर १, पण उत्तर 'नाही' किंवा 'ठामपणे सांगणं शक्य नाही' असं आलं तर '०' अशी नोंद करायची. याप्रमाणे सर्व गोष्टींची तुलना वरील प्रश्नाद्वारे केल्यावर एक १५×१५ या मितीचं मॅट्रिक्स (तक्ता) तयार होईल. त्यावर प्रक्रिया करून एक आलेख तयार करता येतो. यामुळे १५ गोष्टींचा फायद्याच्या दृष्टीने हाती घेण्याचा क्रम सुलभ पद्धतीने मांडणं शक्य होतं. मुख्य म्हणजे या पद्धतीत सर्वांना समाविष्ट करता येतं, तसंच उत्तर होय किंवा नाही या प्रकारे अपेक्षित असल्यामुळे कुठेच क्लिष्टता येत नाही. मतभेद झाले तर विविध आलेख तयार करता येतात आणि त्यांची तुलना करून सर्वमान्य आलेख आणि कार्यक्रम ठरवता येतो.

एकूणच ० आणि १ हे दोन अंक स्वत:चे स्वतंत्र गणिती विश्व उभारू शकतात. ही एक नवलपूर्वक बाब आहे. तसं पाहिलं, तर हे दोन्ही अंक निरुपद्रवी (गणिती दृष्ट्या) आहेत. कारण कोणत्याही संख्येत ० मिळवल्यास किंवा वजा केल्यास उत्तरात फरक पडत नाही. तसंच कोणत्याही संख्येस '१' ने गुणल्यास किंवा भागल्यास उत्तरात फरक पडत नाही. मात्र कोणत्याही संख्येस शून्याने गुणल्यास उत्तर शून्य येतं, तर शून्याने भाग देणे शक्य नाही म्हणूनच कुठलेही सूत्र मांडताना आणि सोडवताना शून्याच्या वरील गुणधर्मांची दखल ठेवणं भाग पडतं.

जेव्हा १ आणि ० बरोबर येऊन १० ही पहिली दोन अंकिय संख्या तयार करतात तेव्हा त्यांची शक्ती कित्येक पटीने वाढलेली दिसते. कोणत्याही

संख्येला १० या संख्येने गुणणं किंवा भाग देणं ही क्रिया अगदी सोपी आहे. तसंच फार मोठी किंवा छोटी संख्या दर्शवण्यास १० या संख्येचा वापर फारच उपयुक्त ठरतो. उदाहरणार्थ, अखिल ब्रह्मांडातील प्रोटॉन, इलेक्ट्रॉन आदी परमाणू अव्यय यांची संख्या $१०^{७९}$ अशी आहे. ही संख्या पूर्णपणे लिहायची म्हटल्यास एक या अंकाच्या पुढे ७९ वेळा शून्य मांडावं लागेल आणि हे कठीण काम आहे.

गणितात अंकाच्या अनेक करामती आणि विस्मयकारक संबंध आढळतात. त्यांची सुरुवात अगदी प्राथमिक अंक ० आणि १ पासूनच होते हे विशेष.

✤

२०

जर्मन गणितज्ज्ञांची महान परंपरा

+× ∑ ∫

मागील तीन शतकांत गणितात झालेल्या प्रगती आणि विकासामध्ये जर्मनीतील अनेक गणितज्ज्ञांचं मोलाचं योगदान आहे. एका पाठोपाठ एक असे जागतिक दर्जाचे गणितज्ज्ञ त्या काळात झाल्यामुळे एकूणच जर्मनीचा गणित आणि विज्ञान क्षेत्रात लक्षणीय विकास झाला. शाळा, कॉलेज आणि युनिव्हर्सिटीमध्ये गणिती परंपरा जोपासण्यासाठी घेतलेले कष्ट आणि होतकरू गणितज्ज्ञांना दिलेलं प्रोत्साहन यांमुळे जर्मनीला असे तज्ज्ञ लाभले. या लेखात सहा निवडक जर्मन गणितज्ज्ञांची कालानुक्रमे ओळख करून घेणार आहोत.

१) गॉटफ्रिड लायबनित्झ (१६४६-१७१६):

कायदा (लॉ) विषयात डॉक्टरेट केलेल्या लायबनित्झ यांना अंकशास्त्रामध्ये खूपच रस होता. या शास्त्राच्या विकासात त्यांचे मूलभूत संशोधन तर आहेच त्याशिवाय त्यांनी एक गणनयंत्रही विकसित केलं.



गॉटफ्रिड लायबनित्झ

यामुळे बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार आणि वर्गमूळ काढणं शक्य होतं. पुढे जाऊन त्यांनी गणनशास्त्रही (कॅलक्युलस) शोधून काढलं आणि त्याबद्दल त्यांना आता प्रख्यात शास्त्रज्ञ आणि गणितज्ज्ञ न्यूटनबरोबर श्रेय दिलं जातं. त्यांनी अपरिमित श्रेणी (इनफिनिट सिरिज) बाबतही भरपूर संशोधन केलं होतं. याशिवाय त्यांचं बरचसं काम आणि संकल्पनांमुळे अलीकडच्या काळात computational complexity मोजण्याची पद्धत विकसित करण्यासाठी फायदा झाला आहे. कम्प्युटर सायन्ससाठी ते पायाभूत ठरलं आहे. त्यांच्याच प्रयत्नांमुळे सन १७०० मध्ये प्रुशियन ॲकॅडमी ऑफ सायन्सची स्थापना झाली. या संस्थेचे पहिले अध्यक्ष म्हणून त्यांचं योगदान एकूणच जर्मनीमध्ये सायन्स आणि गणित शिस्तबद्ध पद्धतीने विकसित होण्यास उपयोगी ठरलं.

२) कार्ल गौस (१७७७–१८५५):



कार्ल गौस

गौस यांना 'प्रिन्स ऑफ मॅथेमेटिशियन्स' म्हटलं जातं. शाळेपासूनच त्यांची गणितातील गती दिसत होती. त्यांना बीजगणिताचं जनक मानण्यात येतं. १८०१ मध्ये त्यांनी लिहिलेला *'डिसक्विझिशन्स ऑफ ॲरिथमॅटिक'* हा ग्रंथ खूप गाजला. गणिताशिवाय भौतिकशास्त्रातही त्यांनी उल्लेखनीय कार्य केलं. सांख्यिकी शास्त्राच्या मुळाशी असलेलं नॉर्मल डिस्ट्रिब्युशनबाबत त्यांनी बरंच संशोधन केलं. त्याच्या आलेखाला 'गौसियन कर्व्ह' अस म्हटलं जातं. वयाची साठी उलटल्यानंतर त्यांनी कॉम्प्लेक्स नंबरची संकल्पना विकसित केली. यामुळे संपूर्ण गणित आणि भौतिकशास्त्राला एक वेगळीच दिशा मिळाली. त्यांनी अनेक तरुण गणितज्ज्ञांना मार्गदर्शन करून जर्मन गणिताची गौरवशाली परंपरा सुरू केली.

३) बर्न्हार्ड रिमान (१८१६–१८६६):

रिमान विलक्षण क्षमतेचे गणितज्ज्ञ होते. त्यांना पुढे आणून त्यांचे मार्गदर्शक गौस यांनी एका प्रकारे गणितावर उपकारच केले. कारण रिमान यांनी गेली दोन हजार वर्षं प्रचलित असलेल्या युक्लिडच्या भूमितीच्या मर्यादा स्पष्ट करून अनंत प्रकारच्या भूमिती निर्माण करता येणं शक्य असल्याचं सिद्ध केलं. या गणिती नवदृष्टीमुळे अनेक जुन्या कल्पना बाद झाल्या. मुख्य म्हणजे या नवीन चौकटीमुळे काही दशकांनी आइनस्टाइन यांना सापेक्षता सिद्धांत विकसित करता आला. रिमान यांचे 'झिटा फंक्शन' आणि 'रिमान हायपोथिसिस' हे गणिती शोध गाजले आहेत. आजही त्यावर संशोधन सुरू आहे हे विशेष.

४) कार्ल वाइर्सस्ट्रास (१८१५–१८९७):

या गणितज्ज्ञाने अंकगणित, बीजगणित आणि गणनशास्त्र अशा अनेक शाखांमध्ये योगदान दिलं आहे. एका अर्थाने जर्मन गणिताची परंपरा पुढे नेण्यास त्यांनी मोठा हातभार लावला. मुख्य म्हणजे त्यांनी गणनशास्त्र आणि एकूणच गणिताचा पाया मजबूत कसा करता येईल, याबाबत मौलिक संशोधन केलं. तसंच इनिफिनिट सिरिजबाबत त्यांचं संशोधनही महत्त्वाचं ठरलं. गणिताचे उत्कृष्ट शिक्षक म्हणूनही ते प्रसिद्ध होते.

५) जॉर्ज कॅण्टोर (१८४५–१९१८):


जॉर्ज कॅण्टोर

आधुनिक अंकगणित, मुख्यतः सेट थिअरिची कल्पना विकसित करण्याचं श्रेय कॅण्टोर यांना जातं. कॅण्टोर असामान्य प्रतीचे गणितज्ज्ञ होते. अनंताची कल्पना एका वेगळ्या प्रकारे त्यांनी मांडली. त्यामुळे गणितातील अनेक संकल्पना आणि पद्धतींमध्ये आमूलाग्र बदल झाले. त्यांचं संशोधन फारच उच्च दर्जाचं होतं यात वाद नाही. त्यांच्या अनेक संकल्पनांवर संशोधन होणं बाकी आहे.

६) डाव्हिड हिल्बर्ट (१८६२–१९४३):

जर्मन गणितज्ज्ञांच्या मालिकेतील एक जगमान्य गणितज्ज्ञ म्हणून हिल्बर्ट यांचा लौकिक आहे. गणिताला एका औपचारिकतेच्या चौकटीत बसवावं (formalized system) असा कार्यक्रम त्यांनी हाती घेतला. याचबरोबर गणितज्ज्ञांनी पुढील संशोधनासाठी कोणते प्रश्न हाती घ्यावेत याबाबत त्यांनी

एक यादी तयार केली आणि मार्गदर्शनही केलं. गणिताचा पाया भक्कम व्हावा याबाबत त्यांचं संशोधन दूरगामी मानलं जातं.

या सहा गणितज्ज्ञांखेरीजही अनेक मान्यवर गणितज्ञ त्या काळात जर्मनीत होऊन गेले. संशोधन आणि लेखन अगदी काटेकोरपणे व्हावं आणि शिस्त कायम पाळली जावी यावर जर्मन गणितज्ज्ञांचा कटाक्ष होता आणि आजही आहे. याबाबत माझा अनुभव सांगण्यासारखा आहे. तीन परीक्षण फेऱ्यांनंतर मान्य झालेल्या आमच्या एका शोधलेखाची टंकलिखित प्रत (तेव्हा संगणक नव्हता) एका जगप्रसिद्ध जर्मन गणिती जर्नलच्या संपादकाने परत तयार करण्यास पाठवली. कारण त्यात एका ठिकाणी प्रूफ हा शब्द अधोरेखित केला नव्हता आणि boundary या शब्दातील 'a' गाळला गेला होता. यावर 'या चुका शुल्लक असल्या, तरी लेखकाने किती काळजी घेतली पाहिजे ही बाब लक्षात राहावी म्हणून हा खटाटोप' असं त्या जर्नलच्या संपादकाने कळवलं. अर्थातच अशा जागरुकतेमुळे त्या जर्नलचं नाव व महत्त्व आजही टिकून आहे. जर्मनी हा देश गणितच नव्हे, तर इतर सर्व क्षेत्रांत पुढे येण्यास हीच शिस्तप्रियता कामी आली आहे हे यावरूनच लक्षात येतं.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्रे पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आली आहेत व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

गॉटफ्रिड लायबनित्झ - www.aber.ac.

कार्ल गौस - www.sil.si.edu

जार्ज कॅण्टोर - www.geocities.com

२१

फ्रान्समधले गणितज्ज्ञ

+× ∑ ∫

फ्रान्स म्हणताच डोळ्यांसमोर उभा राहतो, आयफेल टॉवर. एक प्रेक्षणीय स्थळ म्हणून आयफेलसाठी फ्रान्स जेवढा प्रसिद्ध आहे, तेवढाच तिथल्या संशोधनासाठी. फ्रान्समधील गणितज्ज्ञांनी या क्षेत्रात मोलाचं संशोधन केलं आहे. १७व्या शतकात विज्ञान संशोधन तसंच धर्मसुधारणा यामुळे युरोपमध्ये नवीन विचार आणि औद्योगिक क्रांतीची सुरुवात झाली. त्यात फ्रेंच गणितज्ज्ञांची भूमिका महत्त्वाची आहे. त्यामुळे जर्मनीप्रमाणेच फ्रान्स हा गणितात एक आघाडीचा देश म्हणून पुढे आला. गणितात मोलाची भर घालणाऱ्या काही निवडक फ्रेंच गणितज्ज्ञांविषयी...

१) पेरी डी फर्मा (१६०१–१६६५):

फर्मा हा एक कलाप्रेमी राजकुमार होता. त्याचं मन प्रशासकीय गोष्टींमध्ये रमलं नाही. गणित, प्रकाश, विज्ञान, भाषा आणि काव्य या विषयांत



पेरी डी फर्मा

त्याला रस होता. पण, संशोधनाबाबतचा दृष्टिकोन हौसेखातर असल्यामुळे त्याने संशोधनातील काम प्रसिद्ध केलं नाही. त्याची टाचणवही आणि इतर गणितज्ज्ञांशी केलेल्या पत्रव्यवहारातून त्याचं संशोधन जगापुढे आलं.

फर्मा यांनी अंकशास्त्रात भरपूर काम केलं. त्यांच्या नावाने प्रसिद्ध असलेला गणितातला 'शेवटचा सिद्धांत' (Fermat's Last Theorem) त्यांनी आपल्या टाचणवहीत मांडला. त्याच्या डाव्या बाजूला समासात त्यांनी नमूद केलं की त्याचं प्रूफ त्याला माहीत आहे, पण ते मांडण्यास तिथे पुरेशी जागा नाही. हा सिद्धांत यशस्वीपणे सोडवण्यासाठी मात्र ३०० हून अधिक वर्षं जावी लागली. हा सिद्धांत असं प्रतिपादित करतो, की 'न'चं मूल्य दोनपेक्षा अधिक असेल तर,

$अ^{न} + ब^{न} = क^{न}$ या समीकरणाचे अ, ब आणि क हे पूर्णांक (integer) असतील आणि $अ \times ब \times क \neq ०$ हे शक्य नाही. गणितज्ज्ञ ॲण्ड्र्यु वाइल्स यांनी १९९३–९४ या काळात या सिद्धांताचं यशस्वी प्रूफ दिलं. त्यासाठी त्यांना एका वेगळ्याच पद्धतीची तसंच अनेक गणिती निष्कर्षांची मदत घ्यावी लागली. (या बाबत प्रकरण ३९ पहावे.)

याशिवाय प्रकाशाचं परावर्तन आणि प्रणमन (reflection and propagtion) याबाबत त्यांनी अथक परिश्रम करून सिद्धांत मांडले. त्याला 'फर्मा प्रिन्सिपल' म्हटलं जात. फर्मा यांचं काम अनेक गणितज्ज्ञ आणि वैज्ञानिकांना निश्चितच प्रेरणादायक ठरलं.

२) ब्लेस पास्कल (१६२३–१६६२):



ब्लेस पास्कल

जेमतेम ४० वर्षांचं आयुष्य लाभलेल्या पास्कल यांचं गणित तसंच तत्त्वज्ञानातील कार्य आश्चर्यचकित करणारं आहे. फ्रेंच गणिताला आकार आणि नवी दिशा देण्याचं श्रेय पास्कलला दिलं जातं. भूमिती आणि अंक कल्पना सिद्धांत याबाबत त्यांचं संशोधन उल्लेखनीय आहे. त्यामध्ये 'पास्कल ट्रँगल' या नावाने ओळखली जाणारी अंकांची संरचना बायनोमियल थिअरमखेरीज अनेक क्षेत्रात उपयोगी ठरली आहे.

पास्कल यांचं सर्वात मोठं योगदान म्हणजे संभाव्यता सिद्धांताचा (probability theory) गणिती पाया रचणं. या सिद्धांताचा वापर जास्तीत जास्त प्रमाणात कसा करता येईल यावरही त्याने भर दिला. याशिवाय त्यांच्या अंकगणितातील कामाचा उपयोग कम्प्युटर सायन्सच्या विकासासाठी झाला. म्हणूनच कम्प्युटरसाठी विकसित झालेल्या एका भाषेला पास्कल यांचं नाव देण्यात आलं.

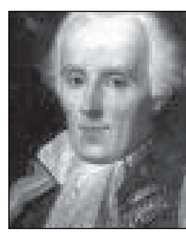
पास्कल यांनी पदार्थविज्ञानात तापमापकावरही प्रयोगाधारित पद्धतीने महत्त्वपूर्ण संशोधन केलं. त्यामुळे असं संशोधन करण्यास प्रतिष्ठा मिळाली. त्यांच्या मृत्यूनंतर त्यांचे धर्मविषयक तत्त्वज्ञानाबाबत वेगळं विवेचन असलेले दोन ग्रंथ प्रसिद्ध झाले. ते फारच गाजले.

३) जीन लॅम्बार्ट (१७२८–१७७७):


जीन लॅम्बार्ट

उच्च प्रतीचे तत्त्वज्ञ आणि गणितज्ज्ञ म्हणून लॅम्बार्ट यांचं नाव घेतलं जातं. नॉन–युक्लिडीयन भूमिती तसंच अंकगणितातील अनेक सिद्धांतांमध्ये त्यांनी मोलाची भर घातली. त्यांपैकी एका सिद्धांताला त्यांचं नाव देण्यात आलं आहे. गणित आणि तत्त्वज्ञानाच्या ज्ञानकोशाची रचना करण्यात त्यांचं मोठं योगदान आहे. फ्रेंच नवविचाराच्या तत्त्वज्ञानाविषयी त्यांनी लिहिलेला टीकाग्रंथ महत्त्वाचा मानला जातो.

४) पिएर लाप्लास (१७४९–१८२७):


पिएर लाप्लास

गणिताला अनन्यसाधारण महत्त्व प्राप्त करून देण्यात यांचं महत्त्वाचं योगदान आहे. विलक्षण प्रतिभा असणाऱ्या लाप्लास यांनी स्टॅटिस्टिक्स आणि खगोलशास्त्रातही महत्त्वपूर्ण संशोधन केलं. लाप्लास ट्रान्सफर्मेशन या नावाने ओळखल्या जाणाऱ्या त्यांच्या पद्धतीमुळे गणितातील अनेक प्रश्नांचं समाधानकारक उत्तर काढणं शक्य झालं आहे. त्यांच्या मते, आवश्यक प्रमाणात माहिती उपलब्ध असल्यास भविष्यातील गोष्टी वर्तवणं शक्य आहे.

५) जोसेफ फोरिअर (१७६८–१८३०):

फोरिअर सिद्धांत, फोरिअर मालिका (series) आणि फोरिअर गुणक


जोसेफ फोरिअर

संख्या (coefficients) या सर्व गणितातील योगदानामुळे फोरिअर यांना एक महत्त्वाचं स्थान आहे. त्यांच्या गणिती संशोधनामुळे गणिताशिवाय पदार्थ विज्ञानातील अनेक शाखांच्या विकासाला चालना मिळाली. त्यांची संशोधन पद्धती अगदी वेगळीच होती आणि अनेकदा प्रस्थापित पद्धतींना छेद देणारी होती. कदाचित त्याचमुळे त्यांना अभेद्य अशी गणितं सोडवणं शक्य झालं.

६) हेन्री पाँयकर (१८५४-१९१२):


हेन्री पाँयकर

गणिताचं सौंदर्य ते गणिताचा पाया अशा सर्व विषयांत भरपूर आणि उल्लेखनीय काम त्यांच्या नावावर आहे. त्यांनी गणितातील अनेक नवीन उपशाखा स्थापन केल्या. नवीन गणितज्ज्ञांना त्यांनी मोलाचं मार्गदर्शन केलं.

विलक्षण स्मरणशक्ती व गणिती प्रतिभा असलेल्या पाँयकर यांचं संशोधन आजही उपयोगी ठरत आहे हे विशेष.

अशा काही निवडक गणितज्ज्ञांचं काम फ्रान्समध्ये गणित विषयातील संशोधनाला आजपर्यंत प्रेरणादायक ठरले आहे. त्यामुळे जागतिक कीर्तीचे फ्रेंच गणितज्ज्ञ सातत्याने पुढे येत आहेत. संशोधनासाठी खास व्यवस्था तसंच शिकवताना (अगदी शाळेपासून) आकृत्यांवर भर देणं अशा पद्धतीमुळे गणिती संशोधनाची पाळंमुळं फ्रान्समध्ये खोलवर रुजलेली आढळतात. याचा दूरगामी लाभ फ्रान्सला होत राहिला आहे.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्रे पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आली आहेत व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

पेरी डी फर्मा - cwx.prenhall.com

ब्लेस पास्कल - dougfloyd.files.wordpress.com

जीन लॅम्बार्ट - library.thinkquest.org

पिएर लाप्लास - www.mlahanas.de

जोसेफ फोरिअर - www.cc.gatech.edu

हेन्री पाँयकर - www.mathematik.de

२२

ब्रिटिश गणितज्ज्ञांचं योगदान

+× ∑ ∫

जर्मन व फ्रान्सप्रमाणेच ब्रिटनचं नाव युरोपमधील औद्योगिक क्रांतीचा विकास आणि विस्तार यासाठी घेण्यात येतं. पण एवढीच ब्रिटिशांची ओळख नाही. गणिताच्या क्षेत्रातही ब्रिटिश संशोधकांनी मोलाची भर घातली आहे. अनेक उच्च श्रेणीच्या गणितज्ज्ञांच्या संशोधनामुळे ब्रिटनला आपलं महत्त्व आणि काही प्रमाणात साम्राज्य स्थापन करून ते टिकवणं शक्य झालं.

१) आयझॅक न्यूटन (१६४२-१७२७):

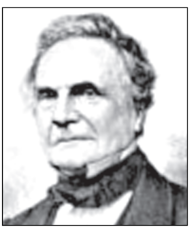

आयझॅक न्यूटन

भौतिकशास्त्र तसंच संपूर्ण विज्ञानजगताला गणिताचा भक्कम पाया देऊन ते जग बदलून टाकण्याचं श्रेय न्यूटन यांना जातं. बायनॉमिल थिअरम आणि कॅलक्युलसचा शोध त्यांनी लावला. भौतिकशास्त्राच्या विविध शाखांमध्ये याचा वापर करून त्यानी संशोधनाचं नवीन दालन उघडलं. त्या आधारे त्यानी लावलेल्या

गतीच्या तीन नियमांचा शोध Newton's three laws या नावाने प्रसिद्ध आहे. या नियमांचा आधार घेऊन गुरुत्वाकर्षणाची (gravitation) संकल्पना त्यांनी जगाला दिली. या आणि वैश्विक स्तरावर लागू पडणारी गणिती सूत्राची रचना या त्यांच्या कार्यामुळे संपूर्ण खगोलशास्त्राला महत्त्वपूर्ण बैठक मिळाली. निसर्गाच्या अनेक रहस्यांचा भेद करणं त्यामुळे शक्य झालं.

प्रकाश आणि दृक्‌शास्त्राचं मूलभूत संशोधनही त्यांच्या नावावर आहे. आयुष्यातील शेवटची २२ वर्षं त्यांनी रॉयल सोसायटीच्या कामासाठी खर्च केली. 'प्रिन्सिपिया' आणि 'ऑप्टिक्स' हे त्यांचे ग्रंथ सुप्रसिद्ध आहेत. संशोधन कसं करावं आणि गणिताचा वापर कसा करावा याचा एक आदर्श न्यूटन यांनी मांडला. एका अर्थाने ब्रिटिश विज्ञान आणि गणित यांच्या आधुनिक विकासाची मुहूर्तमेढ त्यांनी रोवली.

२) चार्ल्स बॅबेज (१७९२–१८७१):

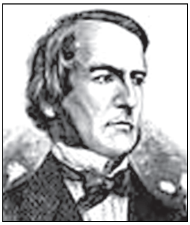


चार्ल्स बॅबेज

केम्ब्रिज युनिव्हर्सिटीतून पदवी घेतल्यावर तिथेच गणिताचे प्राध्यापक म्हणून ते रुजू झाले. त्यांचं मुख्य ध्येय आदर्श गणकयंत्र बनवणं हे होतं. त्याचा पहिला टप्पा 'डिफरन्स इंजिन' या नावाने त्यांनी तयार केला. त्यांचा पुढे विकास करण्यासाठी पुरेसा वेळ मिळत नसल्यामुळे त्यांचा नोकरीला रामराम ठोकून पुढील संशोधन हाती घेतलं. त्यानुसार 'ॲनालिटिकल इंजिन' याचा संपूर्ण गणिती आराखडा आणि तो कार्यान्वित कसा करायचा याची योजना आखली. पण आवश्यक ते आर्थिक पाठबळ न मिळाल्यामुळे तसंच योग्य अशा तंत्रज्ञानाच्या अभावामुळे त्यांचं हे प्रस्तावित यंत्र कागदावरच राहिले. मात्र त्यांची असे यंत्र विकसित करण्याची मूलभूत तत्त्वं अचूक होती हे आधुनिक संगणक तयार करताना सिद्ध झालं. त्याशिवाय *'इकॉनॉमी ऑफ मशिन्स ॲण्ड मॅन्युफॅक्चरर्स'* हा त्यांनी लिहिलेला कारखान्यातील कार्यपद्धतीच्या विश्लेषणावर आधारित ग्रंथ पुढे ऑपरेशन्स रिसर्च या विषयाची सुरुवात मानली जाते.

३) जार्ज बूल (१८१५–१८६४):

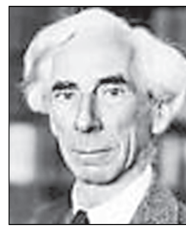
गणितीय रूपात तत्त्वज्ञान मांडणारे प्रथम गणितज्ज्ञ म्हणून बूल ओळखले जातात. ते कोणत्याही युनिव्हर्सिटीत शिकले नाहीत. पण स्वतःचं शिक्षण स्वतःच घेतलेल्या या गणितज्ज्ञाला कॉर्क युनिव्हर्सिटी, आयर्लण्ड इथे गणिताचे



जार्ज बूल

प्राध्यापक म्हणून नेमण्यात आलं. त्यांनी बीजगणितात सखोल संशोधन केलं आणि त्यामुळेच 'बुलयन अलजेब्रा' हा विषय अस्तित्वात आला. याचा उपयोग कम्प्युटर सायन्सच्या विकासासाठी पायाभूत ठरला. वेबसाइटवर माहिती शोधताना सर्वसाधारणपणे जी पद्धत वापरली जाते तिला 'बुलयन सर्च' म्हणतात. बूल यांच्या तर्कशास्त्रावर ही पद्धत आधारित आहे. त्यांचे *'मॅथेमॅटिकल ॲनलिसिस ऑफ लॉजिक'* आणि *'लॉज ऑफ थॉट'* हे दोन ग्रंथ आजही महत्त्वपूर्ण मानले जातात.

४) बर्ण्टान्ड रसेल (१८७२–१९७०):



बर्ण्टान्ड रसेल

मूलतः गणितज्ज्ञ, पण इतर अनेक क्षेत्रांतही उल्लेखनीय कार्याबद्दल रसेल हे जगप्रसिद्ध आहेत. १९५० मध्ये त्यांना साहित्याचं नोबेल पारितोषिक देण्यात आलं होतं. यावरूनच त्यांच्या चौफेर कामगिरीची कल्पना येते. गणित हा विषय तर्कशास्त्रात पूर्णपणे कसा बसवता येईल, हा त्यांचा एक मोठा प्रयत्न होता. 'प्रिन्सिपिया मॅथेमॅटिका' हा त्यांचा सहलेखित ग्रंथ फारच गाजला. गणिताचं तत्त्वज्ञान असा एक नवीन विषय त्यांच्या कार्यामुळे निर्माण झाला. 'रसेलचा विरोधाभास' म्हणजेच Russell's Paradox या त्यांच्या उत्पत्तीमुळे गणिताला एक वेगळीच दिशा मिळाली.

ॲरिस्टॉटलनंतरचा सर्वात मोठा तर्कशास्त्रज्ञ म्हणून रसेल यांचं नाव घेण्यात येतं. शेकडो लेख आणि ५० हून अधिक ग्रंथ त्यांच्या नावावर आहेत. समाजामध्ये वैज्ञानिक दृष्टी रुजावी म्हणून त्यांनी फार तळमळीने काम केलं. त्यांचे काही विचार काळाच्या पुढे होते. त्यांच्या अशा पुरोगामी मतांमुळे त्यांना बराच त्रासही सोसावा लागला. उदा. अण्वस्त्रविरोधी मोहिमेत भाग घेतल्यामुळे त्यांना १९६१ मध्ये कारावास भोगावा लागला. गणित आणि विज्ञानावर आधारित रॅशनल समाजाची विचारसरणी विकसित करण्यात त्यांनी आपलं आयुष्य झोकून दिलं.

५) ॲलन ट्युरिंग (१९१२–१९५४):

कम्प्युटर क्षेत्रात काम करणाऱ्या व्यक्तींना ट्युरिंग हे नाव परिचित आहे. 'ट्युरिंग मशीन' तसंच 'ट्युरिंग टेस्ट' या संकल्पना त्यांनीच मांडल्या.

आर्टिफिशियल इण्टलिजिन्स या क्षेत्राची एका अर्थाने सुरुवात त्यांनी केली. दुसऱ्या महायुद्धात जर्मन संकेतलिपीतील संदेश उलगडण्यासाठी त्यांनी केलेलं गणिती योगदान ब्रिटनसाठी फार महत्त्वाचं ठरलं. कम्प्युटरचा विकास तसंच रसायनशास्त्रातील काही नवीन संकल्पनांचा जीवशास्त्रात वापर याबाबत ट्युरिंग यांचं संशोधन आजही वाखाणलं जातं.


ॲलन ट्युरिंग

वरील गणितज्ज्ञ तसंच इतर अनेक ब्रिटिश गणितज्ज्ञांनी गणिताच्या नवीन शाखा आणि उपशाखा विकसित केल्या. मुख्य म्हणजे त्यांनी ब्रिटिश युनिव्हर्सिटीत गणित संशोधन तसंच त्याचा वापर याबाबत सशक्त परंपरा निर्माण केली. म्हणूनच रॉजर पेनरोझ आणि स्टीफन हॉकिंग अशा न्यूटनच्या तोडीच्या गणितज्ज्ञांची जडण ब्रिटनमध्ये होत आहे. नवीन विषय आणि नवोदितांना संधी आणि सुविधा यामुळेच हे शक्य झालं आहे. म्हणूनच विद्यापीठांनी केवळ परीक्षा घेणं आणि पदवी प्रदान करणाऱ्या संस्था या भूमिकेच्या बाहेर जाऊन संशोधनावर विशेष लक्ष द्यायला हवं. भारतीय विद्यापीठ किंवा संस्थेत कार्य करून जागतिक दर्जाचं गणितातील संशोधन करून दाखवणं हे आव्हान आपण स्वीकारलं पाहिजे. याचं कारण गणितातील आपली गती वादातीत आहे. गरज आहे ती जिद्द, परिश्रम आणि सातत्य याची. गणिती प्रतिभेला अविचलितपणा आणि अपार कष्ट यांची जोड अत्यावश्यक आहे.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्रे पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आली आहेत व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

आयझॅक न्यूटन **-** *encyclozine.com*

चार्ल्स बॅबेज **-** *www.helldragon.eu*

जार्ज बूल **-** *guerreroerrante.wordpress.com*

बर्ण्टान्ड रसेल - www.futureofthebook.org

ॲलन ट्युरिंग - www.computerhistory.org

२३

असामान्य गणितज्ज्ञ

+× ∑ ∫

काही जणांना गणितात उपजतच गती असते, तर काही जण प्रयत्नपूर्वक आणि इण्टरेस्ट घेऊन गणितात योगदान देतात. आधुनिक काळात गणितात असामान्य झेप घेणारे गणितज्ज्ञ होऊन गेले. त्यांच्या कामामुळे गणिताची नवी दालनं खुली झाली. त्यांपैकी काही प्रमुख गणितज्ज्ञांची ही ओळख...



रन देकार्त

१) रन देकार्त (१५९६–१६५०):

धार्मिक रूढी आणि कल्पनांवर विसंबून न राहता प्रत्येक माणसाने वास्तविक जगातील घडामोडींचा अभ्यास करायला हवा. त्या आधारे आणि आपली बुद्धी वापरून योग्य निर्णय घ्यावा आणि यासाठी गणिताचा वापर करावा असा विचार मांडून या फ्रेंच गणितज्ज्ञाने संपूर्ण युरोप खंडात नवीन युगाची सुरुवात केली. अर्थातच त्यांना खूप त्रास सहन करावा लागला.

भूमितीची मांडणी विश्लेषक पद्धतीने करून कोओर्डिनेट भूमिती (coordinate geometry) आणि एनेलिटीकल भूमिती (analytical geometry) या नवीन गणिती शाखांचा विकास त्यांनी केला. तत्त्वज्ञान आणि विज्ञान या दोन्ही क्षेत्रांत त्यांनी नवीन विचारपद्धती मांडली. 'मी विचार करतो म्हणून मी आहे', हा त्यांच्या आधिभौतिकीचा (मेटाफिजिक्स) मुख्य आधार आहे. त्यांचं बरंचसं गणिती कार्य प्रसिद्ध झालं नव्हतं. हल्लीहल्लीच ते उघडकीस आलं. त्यानुसार V - E + F = 2 (V is the number of vertices of a polyhedron, E is the number of edges and F is the number of faces) या महत्त्वपूर्ण सूत्राची उत्पत्ती त्यांच्या नोंदवहीत ऑयलर या गणितज्ज्ञाने शोधून काढण्याच्या फार आधी सापडते. म्हणून आता त्याला ऑयलर-देकार्त या नावाने ओळखलं जातं. त्यांनी प्राणी आणि पक्ष्यांचं विच्छेदन करून जीवशास्त्रात संशोधन कसं करावं याबाबतही प्रकाश टाकला. *'मेडिटेशन्स'* आणि *'ला मॉन्द'* हे त्यांचं तत्त्वज्ञान आणि विज्ञानावरील ग्रंथ फारच गाजले. आजही त्यांचे विचार चर्चिले जातात.

२) लिओनार्ड ऑयलर (१७०७-१७८३):



लिओनार्ड ऑयलर

स्वित्झर्लंडमधील या गणितज्ज्ञाचा ठसा गणितातील जवळजवळ सर्व शाखांवर आहे. सर्व गणितज्ज्ञांमध्ये त्यांच्या नावावर सर्वात जास्त लेख आहेत. यावरून त्यांच्या प्रतिभेची आणि क्षमतेची कल्पना येते. शेवटच्या काही वर्षात त्यांना अंधत्व आलं, तरीसुद्धा मदतनीसाच्या साहाय्याने त्यांनी आपलं संशोधन सुरुच ठेवलं. एखाद्या प्रश्नाकडे नवीन पद्धतीने बघण्याची कला त्यांना प्राप्त होती.

अंकशास्त्र, फंक्शनल ॲनालिसिस, भूमिती, बीजगणित (चायनीस रिमेण्डर थिअरमचं नवीन प्रूफ) अशा अनेक गणिती शाखांत त्यांचं योगदान आहे. जादूई चौरस तसंच ग्राफ थिअरि या विषयांची सुरुवात त्यांच्या संशोधनामुळे झाली. २०० वर्षांनंतर आजही त्यांचं कार्य प्रगत संशोधनाला कारणीभूत ठरत आहे, हे विशेष.

३) श्रीनिवास रामानुजन (१८८७-१९२०):

जेमतेम ३३ वर्षांच्या काळात रामानुजन यांनी केलेलं गणिती कार्य संपूर्णपणे समजण्यास आणखी किती दशकं लागतील हे सांगता येत नाही. त्यांना



श्रीनिवास रामानुजन

निसर्गाचा चमत्कार म्हटलं जातं. कारण त्यांनी मांडलेली सूत्रं बरोबर आहेत हे सिद्ध करता येतं. पण मुळात ती सूत्रं त्यांना सुचली कशी हे काही समजत नाही.

उदाहरणार्थ, 'पाय' या संख्येचं मूल्य काढण्यासाठी रामानुजन यांनी मांडलेलं पुढील सूत्र कोणालाही सुचलं नव्हतं आणि कदाचित सुचलंही नसतं. त्यांनी गणितातील नंबर थिअरि, थिटा फंक्शन आणि इनफिनाइट सिरीज या बाबींवर काम केलं आणि चार हजारहून अधिक सूत्रं मांडून सिद्ध करून दाखवली. भारताची गणित या विषयातील गौरवशाली परंपरा पुन्हा निश्चित करणाऱ्या रामानुजन यांना गणितातील इतर शाखांत काम करता आलं असतं, तर गणिताचा इतिहास बदलून गेला असता !

$$\frac{\text{१}}{\pi} = (\sqrt{\text{८}}/\text{९८०१}) \sum_{\text{न}=\text{०}}^{\infty} \frac{(\text{४न})!\ (\text{११०३}+\text{२६३९०न})}{(\text{न}!\ \text{३९६}^{\text{न}})^{\text{४}}}$$

४) कुर्ट गोदेल (१९०६–१९७८):



कुर्ट गोदेल

ऑस्ट्रियातील या गणितज्ज्ञाने असे सिद्धांत मांडले की ज्याद्वारे गणिताचा पाया, मुख्यतः औपचारिक पद्धतीच्या चौकटीत संपूर्ण गणित विषय बसवता येईल, याबाबत पुनर्विचार करणं भाग पडलं. तर्कशास्त्राच्या आधारे त्यांनी विकसित केलेल्या नवीन पद्धतींमुळे गणिताकडे बघण्याचा वेगळाच दृष्टिकोन प्रचलित झाला. काही वेळा त्यांचं कार्य गणिताबाबत नकारात्मक आहे, असा समज होतो. पण त्यांनी स्वतः असं म्हटलं की गणिताची उपयुक्त बाजू त्यांच्या सिद्धांतामुळे असुरक्षित झालेली नाही. तसंच औपचारिक बाजू भक्कम करण्यास पुरेसा वाव आहे.

५) जॉन व्हॉन न्यूमान (१९०३–१९५७) :

गणित आणि सायन्स या विषयांचा इतिहास तीन पानात मांडायचा झाल्यास, न्यूटन आणि आइनस्टाइन मिळून दोन पानं, जॉन व्हॉन न्यूमान अर्धा पान आणि इतर सर्व उरलेल्या अर्ध्या पानात असा होईल, असं म्हटलं जातं. अतिशय उच्च दर्जाची गणिती क्षमता आणि स्मरणशक्ती असलेल्या न्यूमान


जॉन व्हॉन न्यूमान

यांचा जन्म हंगेरीमध्ये झाला. पण त्यांची कारकीर्द अमेरिकेत घडली. अनेक गणिती आणि संलग्न विषयांत त्यांनी भरघोस संशोधन केलं. प्रथम अणुबॉम्ब बनवणाऱ्या अमेरिकन पथकात त्यांचं योगदान आहे.

न्यूमान यांच्या दोन प्रकल्पातून त्यांच्या अद्वितीयतेची कल्पना येते. एक म्हणजे गेम थिअरि या विषयाची संपूर्ण स्थापना त्यांनी सहलेखित केलेल्या *Game Theory And Economic Behaviour* या १९४४ मध्ये प्रिन्स्टन युनिव्हर्सिटी प्रेसने प्रसिद्ध केलेल्या पुस्तकामुळे झाली. दुसरा प्रकल्प म्हणजे कम्प्युटर कार्यान्वित होण्यासाठी मेमरीमध्ये प्रोग्राम आणि डेटा मागवून त्यावर प्रक्रिया करायची या सिक्वेन्शियल पद्धतीचा विकास त्यांनी केला. आजही सर्वसाधारण कम्प्युटर याच तत्त्वावर काम करत आहेत. म्हणून त्या कम्प्युटरना Neumann Architecture असं संबोधलं जातं. कर्करोग झाल्यामुळे या गणितज्ज्ञाचे अनेक संशोधनाचे कार्यक्रम अपुरे राहिले.

मागील चार शतकातील वरील आणि काही इतर प्रतिभावंत गणितज्ज्ञांच्या कार्यामुळे गणित आणि त्यावर आधारित अनेक क्षेत्रांत आपल्याला प्रगती करणं शक्य झालं. अर्थातच रामानुजनसारखी वरदानप्राप्त व्यक्ती क्वचितच जन्माला येते. म्हणूनच त्यांनी सुरू केलेल्या संशोधनात जमेल तितकी वाढ करण्याचा प्रयत्न आपण सतत केला पाहिजे.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्रे पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आली आहेत व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

रन देकार्त - www.philosophy.umd.edu

लिओनार्ड ऑयलर - www.usna.edu

श्रीनिवास रामानुजन - www.alteregoproductions.org

कुर्ट गोदेल - www.resonancepub.com

जॉन व्हॉन न्यूमान - hps.elte.hu

२४

शक्याशक्यतांचं गणित

+ × ∑ ∫

भविष्यात काय घडणार याची उत्सुकता सगळ्यांनाच असते. मात्र, काही अपवादात्मक गोष्टी सोडल्यास असं भाकित करणं कठीण असतं. गणित आणि सांख्यिकीशास्त्र पुढे काय घडू शकेल याची संभाव्यता (probability) **टक्केवारीत व्यक्त करण्याचा प्रयत्न करतात. उदाहरणार्थ, उद्या पाऊस पडण्याची किंवा विशिष्ट शेअर्स/सोन्याचा भाव कमीजास्त होण्याची शक्यता इत्यादी. असे अंदाज करण्यासाठी अनेक गणिती पद्धती आणि मॉडेल्स निर्माण करण्यात आली आहेत. त्यांचा वापर आर्थिक आणि सामाजिक क्षेत्रातही केला जातो.**

गणिती पद्धती सामान्यतः मागील आकडेवारीचं विविध प्रकारे विश्लेषण करून भविष्यात काय परिस्थिती असू शकेल याचा वेध घेतात. अर्थातच, काही अतर्क्य गोष्टींच्या परिणामांचा अंदाज घेणं या पद्धतींत शक्य होत नाही.

उदाहरणार्थ, प्लेग, भूकंप किंवा अचानक होणारे दंगे अशा आपत्तींमुळे विशिष्ट भागात होणारे बदल अशा शास्त्रीय पद्धतीने व्यक्त करणं सहज शक्य होत नाही.

भविष्यातील बदलांचा अभ्यास करण्यासाठी 'मार्कोव्ह चेन' या एका गणित आणि सांख्यिकी मिश्रित पद्धतीचा वापर करता येतो. १९०७ मध्ये रशियन गणितज्ज्ञ ए. ए. मार्कोव्ह यांनी ही पद्धत शोधली. या पद्धतीचा व्यापक विकास अणि सामाजिक क्षेत्रात उपयोजन १९६० नंतर सुरू झालं. या पद्धतीचा मुख्य गाभा, कोणतीही स्थिती निर्माण होण्यास तिच्या फक्त भोवतालच्या मागील स्थितीचा हातभार लागतो असा आहे. याला प्रथम श्रेणीची (first order) मार्कोव्ह चेन म्हटलं जातं. उदाहरणार्थ, मुलाची किंवा मुलीची आर्थिक किंवा सामाजिक स्थिती आईवडिलांच्या आर्थिक/सामाजिक स्थितीवर अवलंबून असते. ही स्थिती त्यांच्या आजी-आजोबांच्या स्थितीवर अवलंबून असेल तर ती द्वितीय श्रेणीची (second order) मार्कोव्ह चेन या प्रकारात मोडते. क्रिकेटपटूचा मुलगा क्रिकेटपटू होणं (विजय-संजय मांजरेकर, विनू-अशोक मंकड आदी), हॉकीपटूचा मुलगा हॉकीपटू होणं (ध्यानचंद-अशोककुमार) हे प्रथम श्रेणीच्या मार्कोव्ह चेन प्रकाराने तपासणं शक्य आहे. या विश्लेषणासाठी एका स्थितीतून पुढील स्थितीत जाण्याची स्थित्यंतरिय संभाव्यता (transition probability) बदलत नाही अस गृहीत धरलं जातं.

मार्कोव्ह चेनद्वारे हवामानाचा अंदाज कसा लावता येतो याचं एक उदाहरण पाहू या. एका प्रदेशातील हवामानाच्या अभ्यासावरून असं लक्षात आलं, की जर एके दिवशी सूर्यप्रकाश असेल, तर दुसऱ्या दिवशीही सूर्यप्रकाश असण्याची शक्यता ५० टक्के, ढगाळी वातावरण असण्याची संभाव्यता ५० टक्के आणि पाऊस पडण्याची संभाव्यता शून्य. पण एके दिवशी हवा ढगाळ असेल, तर दुसऱ्या दिवशी सूर्यप्रकाश असण्याची संभाव्यता ५० टक्के, ढगाळ असण्याची संभाव्यता २५ टक्के आणि पाऊस पडण्याची संभाव्यता २५ टक्के. जर पाऊस पडत असेल, तर दुसऱ्या दिवशी सूर्यप्रकाश असण्याची संभाव्यता शून्य, ढगळ हवा असण्याची संभाव्यता ५० टक्के आणि पाऊस पडण्याची संभाव्यता ५० टक्के अशी असते. या माहितीला गणितातील मॅट्रिक्स पद्धतीप्रमाणे पुढील स्वरूपात मांडता येतंः

			दुसऱ्या दिवसाचं हवामान		
			सूर्यप्रकाश	ढगाळ	पाऊस
	पहिल्या	सूर्यप्रकाश	.५०	.५०	०
स =	दिवसाचं	ढगाळ	.५०	.२५	.२५
	हवामान	पाऊस	०	.५०	.५०

मार्कोव्ह चेनच्या एका सिद्धांतानुसार वरील 'स' या मॅट्रिक्सला 'स' या मॅट्रिक्सने गुणलं आणि प्राप्त झालेल्या मॅट्रिक्सला 'स' या मॅट्रिक्सने परत गुणलं आणि अशी प्रक्रिया अनेक वेळा केली की शेवटी असे मर्यादापूर्ण (limiting) मॅट्रिक्स प्राप्त होतं. त्याला पुढे 'स' या मॅट्रिक्सने गुणलं तरी उत्तरात काही फरक पडत नाही आणि त्या मर्यादापूर्ण मॅट्रिक्सच्या सर्व ओळी एकसारख्या असतात. त्यावरून पुढील स्थितीवर भाष्य करता येतं. आपल्या उदाहरणातील 'स' या मॅट्रिक्सला १६ वेळा गुणल्यावर खालील मर्यादापूर्ण मॅट्रिक्स मिळतं. (दोन मॅट्रिसिस यांचा गुणाकार करण्याची एक विशिष्ट पद्धत आहे.)

$$स^{१६} = \begin{bmatrix} .४० & .४० & .२० \\ .४० & .४० & .२० \\ .४० & .४० & .२० \end{bmatrix}$$

याचा अर्थ असा आहे, की त्या भागात वर्षाच्या ४० टक्के प्रमाणात सूर्यप्रकाश, ४० टक्के प्रमाणात ढगाळ हवा आणि २० टक्के प्रमाणात पाऊस अपेक्षित आहे. अर्थातच अंतिम उत्तर पहिल्या 'स' मॅट्रिक्समधील आकड्यांवर निर्भर असल्यामुळे त्यांची रचना काटेकोर माहितीवर उभारली पाहिजे. (सतत गुणाकार करून मॅट्रिसिसची साखळी तयार होत असल्यामुळे या प्रक्रियेला मार्कोव्ह चेन हे नाव पडलं.)

समजा, वडील आणि मुलाच्या नोकरीच्या दर्जाबाबत सर्वेक्षणावरून पुढील 'स' मॅट्रिक्स तयार झालंः

			मुलाच्या नोकरीचा दर्जा		
			उच्च	मध्यम	कनिष्ठ
	वडिलांच्या	उच्च	.४४८	.४८४	.०६८
स =	नोकरीचा	मध्यम	.०५४	.६९९	.२४७
	दर्जा	कनिष्ठ	.०११	.५०३	.४८६

या मॅट्रिक्सच्या पहिल्या ओळीचा अर्थ असा, की उच्च नोकरीचा दर्जा असलेल्या वडिलांच्या मुलाचा दर्जा उच्च असणं हे ४४.८ टक्के, तर मध्यम असणं ४८.४ टक्के आणि कनिष्ठ असणं ६.८ टक्के या प्रमाणात आढळलं. उर्वरित ओळींचा अर्थ याचप्रमाणे लावावा. हे मॅट्रिक्स वरप्रमाणे गुणत जाण्याची प्रक्रिया अनेक वेळा केल्यावर 'स' या मॅट्रिक्सचं मर्यादापूर्ण रूप पुढीलप्रमाणे होईलः

मर्यादापूर्ण स =

.०६७	.६२४	.३०९
.०६७	.६२४	.३०९
.०६७	.६२४	.३०९

याचा अर्थ असा, की समाजात प्रचंड प्रमाणात उलथापालथ न झाल्यास नोकरीपेशातील उच्चवर्गात ६.७ टक्के, मध्यमवर्गात ६२.४ टक्के आणि कनिष्ठवर्गात ३०.९ टक्के अशी लोकांची विभागणी होणं काही काळानंतर अपेक्षित आहे.

गेल्या काही दशकांत मार्कोव्ह चेनबाबत सखोल संशोधन झालं आहे. त्याचा अभ्यास आता stochastic processes या सांख्यिकीशास्त्राच्या एका शाखेत समाविष्ट केला जातो.

या विश्लेषण पद्धतीचा उपयोग भौतिकशास्त्र तसंच आर्थिक आणि सामाजिक शास्त्रात मोठ्या प्रमाणात केला जातो. यातील आकडेमोडीसाठी अनेक सॉफ्टवेअर्सही उपलब्ध आहेत.

मार्कोव्ह चेनद्वारे भारत-चीन दरम्यान १९५७-६४ या काळात झालेल्या संदेश देवाण-घेवाण याचा अभ्यास दोन्ही देशातील परराष्ट्रीय धोरणावर महत्त्वाचा प्रकाश टाकतो. तसंच यंत्रसामुग्रीची देखभाल, बदलणारा मार्केट शेअर, कॉल सेण्टरमध्ये सतत होणारी नोकरवर्गाची उलाढाल अशा विविध समस्यांवर उपाय शोधण्यासाठी मार्कोव्ह चेनचा उपयोग होत आहे. एकूणच या क्षेत्रात संशोधन करण्यास तसंच नवीन प्रश्नासाठी उत्तरं शोधून काढण्यास बराच वाव आहे.

✤

२५

जीवनविज्ञान + गणित

+× ∑ ∫

भौतिक विज्ञान आणि सामाजिक विज्ञानमधील शाखांशी गणिताचा घनिष्ट संबंध आहे. तेवढाच उपयोग आणि आधार जीवन–विज्ञानमधील विविध शाखांनाही घ्यावा लागतो. बायोस्टॅटिस्टिक्स, बायोमेट्रिक्स, कम्प्युटेशनल मेडिसीन अशा लाइफ सायन्समधील शाखांचं मूळ गणित आणि सांख्यिकीशास्त्रात आहे.

लोकसंख्या चक्रवाढ दराने वाढत जाऊन जगातील सर्व अन्न आणि संसाधनाने नष्ट होईल, असं गणित मालथ्यूस यांनी मांडलं होतं. उदा. सुरुवातीची लोकसंख्या पाच हजार मानली आणि वाढीचा दर ७ टक्के (जन्म दर–मृत्यू दर) असा मानला, तर भविष्यातील लोकसंख्या पुढील सूत्राने काढता येईलः

'न' वर्षांनी लोकसंख्या = ५,००० × (१.०७)^{न}, न = १, २, ३...

या सूत्रानुसार साहजिकच जशी वर्षं जातील, तसं 'न'चं मूल्य वाढत जाईल आणि वाढीचा दर तसाच राहिला, तर काही शतकात प्रचंड लोकसंख्या

असेल. पण प्रत्यक्षात असं घडलं का किंवा घडेल का, याचं उत्तर 'नाही' असं आहे. कारण जसजशी लोकसंख्या वाढते, तसा लोकसंख्यावाढीचा दर कमी होतो आणि एक विशिष्ट पातळी गाठून लोकसंख्या स्थिर होते. या प्रक्रियेला 'लॉजिस्टिक मॉडेल' म्हणतात. लोकसंख्याशास्त्र (डेमोग्राफी) या सांख्यिकीशास्त्रावर आधारित उपशाखेत या विषयाबाबत अनेक मॉडेल्स विकसित झाली आहेत.

उदाहरणार्थ, एका जंगलात 'अ' आणि 'ब' या दोनच प्रकारची झाडं आहेत. त्यांतील कोणतंही झाड मेलं, तर 'अ' किंवा 'ब' यातील कोणतं तरी झाड त्याची जागा घेण्यासाठी निर्माण होईल. 'अ' प्रकारची झाडं अनेक वर्षं जगणारी असून, त्यांचा वर्षिक मृत्यूदर एक टक्का, तर 'ब' प्रकारच्या झाडांचा वार्षिक मृत्यूदर ५ टक्के मानू या. तसंच असं मानू या की, मेलेल्या झाडांची जागा घेणाऱ्या झाडात 'अ' प्रकारची २५ टक्के, तर 'ब' प्रकारची ७५ टक्के झाडे असतात. जर सुरवातीला 'अ' प्रकारची १० आणि 'ब' प्रकारची ९९० झाडं आहेत असं मानलं, तर भविष्यात झाडांची संख्या काय असेल, याचं गणिती रूप असं आहेः

पुढील वर्षातील अ = (.९९ + (.२५) (.०१)) × या वर्षातील अ + (.२५) (.०५) × या वर्षातील ब

पुढील वर्षातील ब = (.७५) (.०१) × या वर्षातील अ + (.९५ + (.७५) (.०५)) × या वर्षातील ब

या दोन सूत्रांचा वापर करून उत्तर येतं की, एक हजार वर्षांनंतर 'अ' प्रकारची झाडं ६२५, तर 'ब' प्रकारची ३७५ झाडं असतील अशा प्रकारची संतुलित (इक्विलिब्रियम) स्थिती प्राप्त होईल. गंमत अशी आहे की, अन्य सर्व गोष्टी तशाच असतील, तर 'अ' आणि 'ब'चं सुरुवातीचं मूल्य काहीही असलं तरी उत्तर वरीलप्रमाणेच येईल. गणितातील मॅट्रिक्स अल्जेब्रातील सिद्धांत आणि प्रक्रिया याचं स्पष्टीकरण देतात.

संसर्गजन्य रोग कसे पसरतात आणि त्यांचं संपूर्ण उच्चाटन कसं करता येईल, यासाठी गणित आणि सांख्यिकीवर आधारित 'एपिडेमिक मॉडेल्स' उपयुक्त ठरतात. या मॉडेल्समध्ये एकूण लोकसंख्येला १) ज्यांना आता संसर्गजन्य रोग आहे, २) ज्यांना आता रोग नाही पण होण्याची शक्यता आहे आणि ३) ज्यांना लसीकरण किंवा इतर काही कारणामुळे तो रोग होण्याची शक्यता नाही अशा तीन वर्गात विभागलं जातं. संसर्गजन्य रोगाचा प्रादुर्भाव

झाला आणि काही काळानंतर अस्त झाला, तर या तीन वर्गांतील लोकांवर कसा प्रभाव पडेल, हे गणिती सूत्राद्वारे मांडणं आणि त्यावर प्रक्रिया करून विविध उपायांचा काय परिणाम होईल, हे तपासण्यासाठी असं मॉडेल उपयुक्त ठरतं. यासाठी वरील तीन गटांतील लोकांची एकमेकांत मिसळण्याची संभाव्यता (प्रोबॅबिलिटी) आणि रोग प्रेषण (ट्रान्समिशन) करण्याचा दर सर्वेक्षण किंवा पूर्वीच्या अनुभवावरून अनुमानित केले जातात. गणितातील 'डिफरन्स इक्वेशन्स' या पद्धतीद्वारे त्याचं विश्लेषण केलं जातं. प्रत्येक संसर्गजन्य रोगाच्या विशिष्ट लक्षणांनाही या पद्धतीत समाविष्ट केलं जातं. त्यावरून रोग कसा नियंत्रित करायचा आणि त्यासाठी किती वेळ लागेल, अशा प्रश्नांची उत्तरं या गणिती प्रक्रियेतून मिळतात. रोग पसरण्याची तीव्रता किती असेल म्हणजेच एका व्यक्तीमुळे किती माणसं त्या संसर्गजन्य रोगाला बळी पडू शकतात, याचं अनुमानही काढता येतं. या सगळ्या माहितीवरून प्रत्येकाला रोगप्रतिबंधक लस टोचणं किंवा निवडक वयोगटातील लोकांना टोचणं योग्य ठरेल याबाबत निर्णय घेण्यास शास्त्रीय आधार मिळतो. वर्ल्ड हेल्थ ऑर्गनायझेशन (डब्ल्यूएचओ) आणि अशा संस्था जागतिक आणि राष्ट्रीय स्तरावर संसर्गजन्य रोगाबाबत सतत माहिती अद्ययावत करतात. तसंच तिचा गणिती मॉडेल्समध्ये वापर करून वेळोवेळी अशा रोगांचं उच्चाटन करण्याबाबतचे उपाय सुचवतात. अशा आखलेल्या कार्यक्रमामुळेच देवीसारख्या रोगाचं उच्चाटन करणं शक्य झालं.

प्राणिशास्त्र आणि आनुवंशिकता यांचा गणिताशी गहन संबंध आहे. १८६५ मध्ये ग्रेगोर मेण्डेल यांनी गणिताच्या भाषेत आनुवंशिक गुण किंवा दोष एका पिढीतून पुढच्या पिढीत किती प्रमाणात जातात, हे दाखवून दिलं. सांख्यिकीशास्त्राच्या आधाराने या मॉडेल्सची व्यापकता अनेक पटीने वाढवण्यात आली आहे. त्यावरून काही आनुवंशिक रोग कशा प्रकारे आणि का पसरतात, याची कारणं शोधून काढण्यात यश मिळालं आहे. जनुक (जीन्स) यांचे आपसातले संबंध तसंच बदल (क्रॉसओव्हर्स) यांबाबतही गणिती मॉडेल्स विकसित करण्यात आली आहेत. यामुळे आनुवंशिक बदल नियंत्रित करण्यासाठी उपाय शोधून काढणं शक्य झालं. जिनेटिक्स हा संपूर्ण विषय गणितमय आहे, असं म्हटल्यास चूक ठरणार नाही. आता संगणकामुळे या विषयातील कठीण अशी गणिती सूत्रं आणि समीकरणं सोडवणं शक्य झाल्यामुळे संशोधनाला अधिक वाव मिळाला आहे.

मार्कोव्ह चेन मेथड, टोपोलॉजी आणि ग्राफ थिअरि अशा गणितातील अनेक संकल्पना आणि शाखांद्वारे डीएनए आधारित संपूर्ण उत्क्रांतीचा अभ्यास करता येतो. शरीरशास्त्रातही गणिताचा वापर मोठ्या प्रमाणात होतो. उदाहरणार्थ, रक्तदाब आणि रक्ताभिसरणविषयक अभ्यासासाठी हायड्रोडायनेमिक्स या गणितातील एका शाखेतील अनेक कल्पना आणि प्रक्रियांचा उपयोग होतो. म्हणूनच गणितातल्या विविध शाखांतील संशोधनाचा चिकित्सा क्षेत्र आणि एकूण लाइफ सायन्समध्ये मोठ्या प्रमाणात वापर शक्य आहे.

आकडेवारी, विविध प्रकारचे तक्ते आणि आलेख यांचा चिकित्साक्षेत्रात भरपूर वापर होतो. *मॅटलॅब* या कम्प्युटर सॉफ्टवेअरचं प्रशिक्षण चिकित्सा-क्षेत्रातील व्यक्तींना त्याबाबत उपयुक्त ठरू शकतं. मेंदूपेशीतल न्यूरॉनचं जाळं कसं कार्य करतं, याबाबतच्या संशोधनात गणितातील नेटवर्क ॲनालिसिस आणि ग्राफ थिअरि यातील प्रगत संकल्पनांचा वापर केला जात आहे.

जीवनविज्ञानमधील गणिताचा वाढता उपयोग पाहता विज्ञानक्षेत्रात कार्यरत व्यक्तींनी या गणिती पद्धतीचं मूलभूत ज्ञान मिळवायला हवं. गणितज्ज्ञांबरोबर संयुक्त संशोधन कार्यक्रम हाती घेणं दोन्ही क्षेत्रांना उपयुक्त ठरू शकेल.

✤

२६

विभिन्न जाळी आणि गणित

+× ∑ ∫

दैनंदिन जीवनात आपण अनेक प्रकारच्या जाळ्यांचा वापर करत असतो जसे की पाणी पुरवठा करणाऱ्या जलवाहिन्यांचे, रस्ते व रेल्वेचे, टेलिफोन प्रणालींचे, विद्युत तारांचे इत्यादी. प्रत्येक जाळं हे वेगळ्या प्रकारचं असून त्याचं नियोजन आणि व्यवस्थापन तसंच त्याद्वारे दिल्या जाणाऱ्या सेवांचं नियंत्रण करणं हे एक आव्हानच असतं. या सर्व प्रक्रियांमध्ये गणिताचा वापर भरपूर प्रमाणात होतो हे कदाचित लोकांच्या लक्षात येत नाही. ग्राफ थिअरि व नेटवर्क ॲनालिसिस या गणिताच्या दोन शोखा या बाबतीत महत्त्वपूर्ण योगदान देतात. जाळ्यांचे असंख्य प्रकार असल्यामुळे इथे काही निवडक जाळी व त्यांच्याशी संबंधित गणिताची चर्चा करू या.

प्रकल्प व्यवस्थापन: कोकण रेल्वेसारखे मोठे, जटील व कालबद्ध प्रकल्प यांचे नियोजन व संचलन करण्यासाठी नेटवर्क ॲनालिसिसमधील

पर्ट (PERT - Programme Evaluation and Review Technique) आणि सीपीएम (CPM - Critical Path Method) या दोन गणिती पद्धती वापरणं अतिशय उपयुक्त ठरतं. यामध्ये प्रथम प्रकल्पातील सर्व घटकांची यादी बनवणं व तो कार्यान्वित करण्यासाठी लागणारा वेळ व इतर सामुग्रीचे अंदाजपत्रक बनवावं लागतं. त्यानंतर सर्व घटकांचा क्रम कसा असेल हे विचारात घेऊन सुरुवातीपासून शेवटच्या घटकापर्यंत होणाऱ्या क्रिया (actions) एक जाळं किंवा नेटवर्क या स्वरूपात मांडाव्या लागतात. प्रत्येक प्रक्रियेसाठी लागणारा वेळ व घटकांचा क्रम लक्षात घेऊन एका गणिती पद्धतीने त्या नेटर्वकमधील क्रिटिकल पाथ (जो एक किंवा अधिक असू शकतात) शोधता येतो. यामुळे संपूर्ण प्रकल्पाला किती वेळ लागेल हे तर समजतेच पण कुठल्या क्रिया ठरावीक मुदतीत पूर्ण न झाल्यास प्रकल्प किती लांबेल हे सुद्धा समजतं. म्हणजेच त्या Critical Path वरील प्रक्रियांना आवश्यक ती साधने उपलब्ध करून देणं व त्यांचा सतत पाठपुरावा करणं हे काम प्रकल्प मॅनेजरला करावं लागतं. जर प्रकल्प कमी वेळात पूर्ण करायचा झाला तर किती प्रमाणात अतिरिक्त साधने लागतील व ती कोणत्या घटकांसाठी लागतील याचे निर्देशन पण या गणिती पद्धती करतात. या पद्धतींच्या उपयुक्ततेमुळे त्याबाबत अनेक प्रकारचे संशोधन सुरू आहे. अर्थातच हजारो घटक असलेल्या प्रकल्पांसाठी कम्प्युटरची मदत आवश्यक ठरते. या गणिती पद्धती व त्यांची प्रगत रूपे यांचा वापर प्रकल्प नियोजन व व्यवस्थापन सुरळीतपणे करण्यासाठी विविध प्रकारची सॉफ्टवेअर उपलब्ध आहेत.

सुविधा जाळ्यांसाठी प्रक्रिया: रस्ते व भूवापर यांचा परस्पर घनिष्ठ संबंध आहे. जर नवीन शहर वसवायचं असेल तर त्याचं उदिष्ट जसं की व्यापार केंद्रित किंवा पर्यटन केंद्रित असं लक्षात घेऊन रस्ते व त्यांचं जाळं कसं असावं व ते कुठल्या क्रमाने विकसित करण्यात यावं याचं गणित मांडता येतं. तसंच आताच्या शहराचा भावी विस्तार लक्षात घेऊन रस्ते कसे वाढवावेत आणि इतर कुठल्या प्रकारच्या परिवहन साधनांची व त्यांच्या जाळ्यांची जोड द्यावी याचे वेगळ्याप्रकारे विश्लेषण करता येतं. म्हणजेच भूवापार, लोकसंख्या, आर्थिक उलाढाल व वाहतूक क्षमता यांचा एकत्रितपणे विचार करावा लागतो त्यासाठी संयुक्त भूवापर–परिवहन (Integrated Landuse-Transportation) मॉडेल्स विकसित करण्यात आली आहेत व आपल्या देशातही त्यांचा वापर मोठ्या प्रमाणावर केला जातो. गणितातील अनेक शाखांचा त्यात उपयोग होतो.

सार्वजनिक वाहने व खाजगी वाहने रस्त्यांचा वापर भिन्न दृष्टिकोनातून करतात. खाजगी वाहने गंतव्य स्थानी पोहोचण्यासाठी किमान वेळ किंवा इंधन बचत किंवा कमी गर्दी असा मार्ग (route) घेतात. यासाठी Shortest Path Algorithm या प्रकारच्या अनेक गणिती पद्धती विकसित केल्या गेल्या आहेत. सार्वजनिक बस व्यवस्था मात्र जास्तीत-जास्त लोकांना सेवा देणं व भाडे कमावणं या अंगाने बसचे मार्ग आखते. यासाठी वेगळ्या प्रकारचं गणित वापरावं लागतं.

जलवाहिन्यांचे जाळे कसे असावे व पाइप्स कुठल्या व्यासाचे असावेत असे महत्त्वपूर्ण निर्णय घेण्यासाठी वेगळ्याच प्रकारची गणिती पद्धती वापरावी लागते. यासाठी देखील कम्प्युटर सॉफ्टवेअर विकसित झाली आहेत.

भूवापर व वरील इतर अनेक प्रकारच्या सुविधांची जाळी एकत्रित व व्यवस्थितपणे हाताळण्यासाठी भौगोलिक माहिती सयंत्रणा (Geographic Information System) ही कम्प्युटरवर आधारित पद्धती अत्यंत महत्त्वपूर्ण ठरत आहे. या यंत्रणेत विविध प्रकारे गणिती मॉडेल्स समाविष्ट करण्याची सोय असते. अशा जीआयएस यंत्रणेचा वापर मुंबई महानगर प्रदेश विकास आराखडा १९९६-२०११ तयार करण्यात व काही पायाभूत सुविधा जाळ्यांच्या अभ्यासासाठी केला गेला आहे (पहा : www.mmrdamumbai.org).

संदेश वाहकांची (Communication) जाळी हाताळणं: संदेशांची देवाणघेवाण करण्यासाठी टेलिग्राफ, टेलिफोन, कम्प्युटर या साधनांची प्रचंड जाळी पसरली आहेत. त्यांच्या माध्यमातून किती प्रमाणात व गतीने (capacity and speed) संदेश पाठवणं शक्य आहे याचं गणित व्यवस्थापनाला फार मदत करतं. तसंच संदेश अचूकपणे जाणं हे पण महत्त्वाचं असल्यामुळे नैसर्गिक किंवा इतर कारणांमुळे निर्माण होणारे दोष (distortions) कसे दूर करता येतील याबाबतचं मार्गदर्शन इन्फोर्मेशन थिअरि (Information Theory) या गणित व सांख्यिकी शास्त्रावर आधारित शाखेमुळे मिळतं. तसंच विविध चॅनेल्समधून माहिती जात असल्यामुळे तिची गुप्तता बाळगण्यासाठी गणितातील कोडींग थिअरि (Conding Theory) या शाखेतील मॉडेल्स मदत करतात.

टेलिफोन्सच्या जाळ्यांवर संदेश देवाण-घेवाण तीव्रता सारखी बदलत असते. तरी संदेशांना उपलब्ध जाळ्यांचा सर्वोत्तम (optimal) उपयोग करून कार्यक्षम सेवा कशी देता येईल या प्रश्नाला लिनिअर प्रोग्रामिंग (Linear Programming) या गणिती पद्धतीने हाताळता येतं. मात्र टेलिफोनसच्या

महाकाय जाळ्यांसाठी या पद्धतीतील पारंपरिक सिंप्लेक्स मेथड (Simplex Method) चा वापर केल्यास अशा प्रश्नाचं उत्तर प्राप्त करण्यास कम्प्युटरलाही अपेक्षेबाहेर वेळ लागतो. अभिमानाची गोष्ट अशी आहे, की आय.आय.टी. मुंबई इथून बी.टेक व अमेरिकेतून पीएच.डी. झालेले डॉ. नरेंद्र करमरकर यांनी हा प्रश्न सोडवण्यासाठी एक नवीन व प्रभावी पद्धती १९८४ मध्ये विकसित केली. त्या पद्धतीला आता त्यांच्याच नावाने म्हणजे Karmarkar Algorthim असे ओळखले जाते व फार मोठ्या लिनिअर प्रोग्रोमिंग प्रॉब्लेम्ससाठी ती उपयुक्त सिद्ध होते. साहजिकच डॉ. करमरकर यांना या कामामुळे आंतरराष्ट्रीय किर्ती व अनेक पुरस्कार मिळाले आहेत.

मानवी संबंधांची जाळी अभ्यासणं : जागतिकीकरणामुळे अनेक कंपन्यांची कार्यालये व स्टाफ अनेक देशांत पसरला आहे. त्याच्या कामांचे व आपसातील संबंधांचे व्यवस्थापन हे एक मोठं आव्हान आहे. याबाबतीत ग्राफ थिअरितील विविध संकल्पना व मॉडेल्स यांचा उपयोग केला जातो. ११ सप्टेंबर २००१ रोजी अमेरिकेत विविध ठिकाणी अतिरेकी हल्ले झाले. त्यानंतर त्या अतिरेकी संघठणातील मुख्य व्यक्ती यांच्या आपसातल्या गाठीभेटी, संदेश देवाण-घेवाण यांची तीव्रता अशा अनेक बाबी विचारात घेऊन त्यांचे आपसातले संबंध व एकूण संघटनेचे चित्र ‘डायग्राफ’ या विशिष्ट गणिती आलेख पद्धतीने उभं करता आलं आहे. त्यामुळे कटात गुंतलेल्या व्यक्तींचा सहभाग कसा व किती प्रमाणात होता व पुढील विविध उपाययोजनांसाठी उपयुक्त माहिती मिळाली.

वरील चर्चेवरून लक्षात येईल, की विविध जाळ्यांच्या संरचनेपासून त्यांच्या व्यवस्थापन व कार्यक्षम उपयोगासाठी अनेक गणिती शाखांचा वापर होत आहे. जाळ्यांची वाढत जाणारी क्लिष्टता (Complexity) ही एका अर्थाने गणिती संशोधनाला पुढे नेणारी आहे. म्हणजेच गणितात संशोधनासाठी विषयांची कमतरता कधीच भासणार नाही.

✤

२७

कसा करावा अभ्यास गणिताचा ?

+× ∑ ∫

गणिताची व्यापक उपयुक्तता पाहता त्याचं मूलभूत तसंच व्यावहारिक ज्ञान प्रत्येकाकडे असायला हवं. ज्यांना गणितामध्ये करिअर करायचं असेल त्यांनी यात प्रावीण्य मिळवायला हवं. गणिती संकल्पनांचा अर्थ समजावून घेणं, प्रश्न सोडवण्याच्या क्रियांचा सराव करणं, एखाद्या समस्येला गणिती चौकटीत बसवणं आणि उत्तरांचा अर्थ काढणं हे गणिताच्या अभ्यासाचे प्रमुख घटक आहेत. अर्थातच वेगवेगळ्या पातळीवर गणिताचा अभ्यास करण्याचं तंत्र वेगळे असतं. त्याचीच चर्चा इथे आपण करणार आहोत.

शालेय गणित (पहिली ते दहावीपर्यंत): गणित ही निसर्गाची भाषा आहे असं समजून त्याच्या अभ्यासाला दिशा दिली पाहिजे. म्हणजेच गणिताची मूळाक्षरे जशी की, अंकमाला, भूमितीमधील बिंदू, रेषा आदी संकल्पना आणि त्या आधारे निर्मित शब्द आणि वाक्यं म्हणजे बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ काढणं अशा प्रक्रिया आत्मसात करायला हव्यात. दोन ते तीस पर्यंतचे पाढे तोंडपाठ असायला हवेत. यासाठी पालकांनी आपल्या मुलांमध्ये लहानपणापासूनच या विषयाची गोडी निर्माण

करायला हवी. गणितातील पायाभूत संकल्पनांचं महत्त्व आणि त्यावरील पकड मजबूत करण्यासाठी पालकांनी मुलांना मदत करायला हवी. त्यासाठी दिवसा किंवा रात्री किमान अर्धा तास दोघांनी मिळून पाढे म्हणणे, तोंडी हिशोब करणे, कोडी सोडवणे अशा गोष्टी कराव्यात.

गणक (calculator) आणि संगणक (computer) अशी साधनं उपलब्ध असली, तरी बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या सगळ्या प्रक्रिया स्वतःला करता यायला हव्यात. अशी साधनं उपलब्ध नसताना स्वतःलाच यातून मार्ग काढायला हवा. त्याशिवाय गणिती संकल्पना आणि प्रक्रियांचा अर्थ समजून घेण्यासाठी आणि यात गोडी निर्माण होण्यासाठी मौखिक आणि हाताने सोडवलेल्या पद्धतींचा फार उपयोग होतो. निसर्गातील तसंच मानवनिर्मित गोष्टींमध्ये दडलेले गणिती आकार, अनुपात, समप्रमाणबद्धता शोधत राहणं हेसुद्धा उपयोगी ठरतं.

पाचवी ते दहावीच्या विद्यार्थ्यांनी गणिती संकल्पना आणि प्रक्रियांचा अर्थ स्वतः लावणं तसंच त्यांचा प्रत्यक्षात वापर करण्याचा प्रयत्न केला पाहिजे. उदाहरणार्थ, १७ इंच टीव्ही किंवा कम्प्युटरचा मॉनिटर, घरातील वस्तूंचं क्षेत्रफळ आणि घनता मोजणं, खेळांतील आकडेवारीचं विश्लेषण करणं असे अनेक उपक्रम सातत्याने केल्यास गणितात रस निर्माण होण्यास मदत मिळते. यासाठी संगणकाचा कल्पकतेने वापर केल्यास वाढीव फायदा होतो. गणितज्ज्ञांची चरित्रं, गणिताचा इतर क्षेत्रांत झालेला वापर आणि गणित विषयाला वाहिलेली सर्वसामान्य आणि मनोरंजनात्मक गणित (Recreational Mathematics) या बाबतची सामुग्री आणि साहित्याचं सतत वाचन उपयोगी पडतं. यासाठी कॅलेण्डर, विविध वेळापत्रकांचा अभ्यास करावा.

शालेय आणि सर्वसाधारण परिक्षेसाठी गणितं लवकरात लवकर (घड्याळ लावून) तसंच अचूकपणे सोडवण्यावर भर दिला पाहिजे. यासाठी भरपूर प्रकारची गणितं अनेक वेळा हाताळली पाहिजेत. हा सराव इतका पाहिजे की प्रश्नपत्रिकेतील गणित एकदा वाचताच कुठली पद्धती वापरावी हे लक्षात आलं पाहिजे. परिक्षेतील शेवटची १० ते १५ मिनिटं पूर्ण उत्तरपत्रिका परत तपासण्यासाठी मिळाली पाहिजे, असं उद्दिष्ट ठेवून पेपर सोडवले पाहिजेत. आय.आय.टी. प्रवेश व तत्सम परिक्षांसाठी वेगळी तयारी करावी लागते. याचं मुख्य कारण म्हणजे त्यातील प्रश्न गणिताच्या दोन किंवा अधिक शाखांमधील संकल्पना आणि प्रक्रियांवर आधारलेले असल्यामुळे साहजिकच जास्त सखोल विचार करायला लावतात.

इंटरनेटचा तसंच संगणकावर आधारित इतर सामुग्रीचा उपयोग गणितातील अमूर्त (abstract) कल्पना समजण्यास मदत करू शकतात. उदाहरणार्थ, हसत खेळत गणित प्रशिक्षण मालिका या सीडीज पहिली ते दहावीपर्यंतच्या अभ्यासक्रमातील सर्व धडे शिकण्यास आणि सराव करण्यास उपयुक्त ठरू शकतात. गणितातील प्रक्रिया आलेख, चित्राद्वारे समजण्यास मदत होते. म्हणूनच त्यावर भर दिला पाहिजे जो की संगणकातील graphics प्रणाली प्रदान करते. प्रत्येक संकल्पनेसाठी अनेक वेबसाइटस् उपलब्ध आहेत, तरी त्यांचा वापर जरूर करावा. मात्र मनाची एकाग्रता आणि स्मरणशक्ती वाढवणं याला पर्याय नाही.

महाविद्यालयीन गणित (११वी ते एम.ए./एम.एससी.पर्यंत): या पातळीवर गणित वेगळ्या प्रकारे शिकवलं जातं. प्राध्यापक मुख्यतः गणिती शाखेची मूलभूत तत्त्वं आणि सिद्धान्त मर्यादित स्वरूपात गणिती उदाहरणं सोडवून दाखवतात. इथे विद्यार्थ्यांनी स्वतः जास्त मेहनत घेऊन त्या संकल्पनांचा वापर करणं अपेक्षित असतं. म्हणून विद्यार्थ्यांनी ग्रंथालयात त्याबाबत असलेली पुस्तकं आणि इतर सामुग्रीचं वाचन तसंच प्रश्न सोडवण्यावर भर दिला पाहिजे. उदाहरणार्थ, संभाव्यता सिद्धांत (probability theory) वर्गात एक किंवा दोन प्रकारे शिकवण्यास वेळ असतो. प्रत्यक्षात यासाठी अनेक पर्याय आहेत आणि ते समजून घेण्यासाठी विविध पुस्तकं, मासिकं आणि वेबसाईटस्ची मदत होऊ शकते. त्यामुळे गणिताचा वापर कसा केला जाऊ शकतो याबाबतही उपयुक्त माहिती मिळते.

अनेक विद्यार्थी, विशेषतः अभियांत्रिकी आणि चिकित्सा (engineering and medical) क्षेत्रांतील, गणिताचा अभ्यास परिक्षेपुरताच मर्यादित ठेवतात आणि काही उपविषय (sub-topics) पूर्णपणे गाळतात. पूर्वी कदाचित यामुळे करिअरमध्ये पुढे अडचण येत नसेल. पण आता गणिताचा वापर प्रत्येक क्षेत्रामध्ये इतका व्यापक झाला आहे की, अशा गाळलेल्या गणिती विषयांची गरज भासू शकते. ज्यांना गणित किंवा संलग्न विषयात करिअर किंवा संशोधन करायचं आहे त्यांनी अशी पळवाट काढणं अक्षम्य ठरू शकतं. न समजलेल्या गणिती भागाबाबत जाणकारांकडून मार्गदर्शन घ्यावं.

गणित, सांख्यिकी आणि ऑपरेशन्स रिसर्च यांचा वापर प्रत्यक्ष व्यवहारात किंवा प्रकल्पात कसा केला जातो हे समजावून घेणं या विषयांच्या अभ्यासासाठी फारच महत्त्वपूर्ण आहे. म्हणूनच वेळोवेळी महाविद्यालयांनी या विषयातील तज्ज्ञांची भाषणं आणि चर्चा घडवून आणाव्यात. ज्यामुळे

विद्यार्थ्यांना गणिती पद्धतींचा इण्डस्ट्री तसंच इतर अनेक क्षेत्रांत कसा उपयोग केला जातो याची कल्पना मिळते. विद्यार्थ्यांनी अशी संधी सोडू नये किंबहुना अशा प्रकारचे कार्यक्रम, शैक्षणिक सहली आयोजित करण्याचे प्रयत्न करावेत. गणिताचा सर्वांगीण अभ्यास करणं कधीही फलदायी ठरतं.

गणितातील संशोधन (एम.फील, पीएच.डी. व त्यापुढील): संशोधनासाठी विषय निवड ही प्रमुख बाब असते. अनेक वेळा महाविद्यालयीन शिक्षण घेतानाच एखाद्या विषयात किंवा उपविषयात अधिक रस निर्माण होतो आणि त्यातच पुढे संशोधन करण्याचा प्रयत्न होतो. मार्गदर्शक किती आणि कशा प्रकारचं काम झालं आहे, तसंच पुढील काळात त्या विषयातील संशोधनाचं महत्त्व याबाबत योग्य सल्ला देतो. काही वेळा मार्गदर्शक स्वतः काही विषय सुचवू शकतो. कोणत्याही परिस्थितीत संशोधकाने मागील पाच वर्षांतील *मॅथेमॅटिकल रीव्ह्यूज (Mathematical Reviews)* या ॲबस्ट्रेक्टींग जर्नलचे अंक न चुकता चाळावेत. त्यामुळे निवडलेल्या विषयाबाबतच्या संशोधनाची सद्यस्थिती, महत्त्वपूर्ण जर्नल्स, मासिकं आणि पुस्तकं यांबरोबरच इतर संशोधकांची माहिती मिळते जिचा वापर उपयोगी सिद्ध होतो. उदाहरणार्थ, इतर संशोधक त्यांच्या इतर शोधपत्र आणि सामुग्रीबाबत माहिती पुरवतात आणि मार्गदर्शनही करतात. काही वेळा यामुळे संयुक्तपणे संशोधन हाती घेता येतं. यादृष्टीने परिषदा आणि कार्यशाळांचा उपयोग करून घ्यावा. (या संदर्भात पहाः पाटकर, वि., *संशोधन-मार्गावरील प्रवास,* २००७. हे पुस्तक www.noeticindia.com या वेबसाइटवर उपलब्ध आहे.)

गणित विषयात सहसा २५ ते ४५ वर्षे या वयोगटात असताना नावीन्यपूर्ण तसंच भरीव संशोधन होताना आढळतंय. म्हणून गणिती संशोधकाने पीएच.डी. पदवी शक्यतो लवकर प्राप्त करावी. ज्यामुळे पुढील संशोधनासाठी आवश्यक ती तयारी तर होईलच पण आणखी कसदार संशोधनासाठी भरपूर वेळ मिळेल. संशोधनाचा विषय सतत मनात घोळणं, त्यासह वाचन आणि चिंतन हे तर नितांत गरजेचं आहे. संगणक आणि विशिष्ट सॉफ्टवेअर वापराचं ज्ञानही वेळोवेळी आत्मसात केलं पाहिजे. गणितात संशोधनाला अमर्यादित संधी आहेत आणि ते किमान साधनांनी करणं शक्य आहे. या अग्निहोत्रात खंड पडू नये याची काळजी घ्यावी.

गणिताचा अभ्यास या प्रकारे केल्यास पाया तर भक्कम होईलच, शिवाय या विषयात गोडीही निर्माण होईल. त्यामुळे कुठल्याही विषयात आणि क्षेत्रात योगदान देता येईल, असा विश्वास वाटतो.

✤

२८

गणित शिकवावं कसं ?

+× ∑ ∫

विविध पातळीवर शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना कुठलाही विषय शिकवताना कशा प्रकारच्या पद्धती, वापरायच्या आणि काय काळजी घ्यायची याबाबत सतत संशोधन चालू आहे. त्याचा उपयोग बी.एड. आणि एम.एड.च्या पाठ्यक्रमात कालांतराने बदल करण्यात तसंच क्रमिक पुस्तकांचं पुनर्लेखन करण्यात होतो. याबाबत शिक्षकांसाठी खास वर्कशॉप्स, शिबिरंही भरवली जातात. गणित हा विषयही त्याला अपवाद नाही.

गणित हा विषय असा आहे, की प्राथमिक शिक्षणातच जर त्याचे अध्यापन नीट झालं नाही तर त्या विषयाची भीती विद्यार्थ्यांच्या मनात निर्माण होते आणि ती दूर करणं पुढे फार कठीण होतं. याबाबत पु. ल. देशपांडे यांनी त्यांच्या शालेय जीवनातील जे अनुभव सांगितले आहेत ते अगदी बोलके आहेत. म्हणून सुरुवातीपासूनच गणितातील पायाभूत घटक जसं की, अंक, बेरीज-वजाबाकी या प्रक्रिया, भूमितीमधील बिंदू, रेषा, वर्तुळ इत्यादी

संकल्पना यांचं गणिती अमूर्त रूप, त्याचप्रमाणे ते प्रत्यक्षात वापरायचं रूप याची सांगड घालून दाखवणं फार महत्त्वाचं ठरतं. यासाठी अनेक मार्ग आहेत. त्यातील एक मार्ग म्हणजे वयाने लहान विद्यार्थ्यांना त्यांच्या खेळण्यातील तसंच वापरातील विविध वस्तूंचे आकार कसे आहेत, हे शोधण्यास सांगायचं. त्याबरोबरच वातावरणातील वस्तूंचे आकारमान छोटे की मोठे कसं ठरवायचं याबाबत विचार करण्यास सांगावं. यासाठी विविध नाणी आणि नोटा यांचा वापर करणंही योग्य ठरतं. अंकाचा क्रम, विविधता आणि त्यांचा वापर करणं याची कल्पना त्यामुळे रुजते, असा अनुभव आहे.

खेळ आणि गोष्टी या दोन बाबी सर्व बालक-बालिकांना सामान्यपणे आवडतात. या दोन माध्यमांवर गणित शिकवण्यासाठी जास्तीतजास्त भर द्यावा. यामध्ये मुलांना स्वतः भाग कसा घेता येईल याचा विचार करावा. उदाहरणार्थ, पत्त्यांचा बंगला करताना त्याचा आकार कसा होतो, त्याचा पाया मोठा आणि वरचा भाग निमुळता का ठेवावा लागतो, असे अनेक प्रश्न त्यांना गणितातील अनेक संकल्पनांचं प्रात्यक्षिक वापरून सोडवता येऊ शकतात. 'व्यापार' हा खेळ त्यांना संख्यांचा वापर व्यवहारात कसा होतो याचा एक अनुभव देऊ शकतो. याशिवाय गणिताशी निगडित अनेक खेळणी आणि उपकरणं आता उपलब्ध आहेत. त्यांचा कमाल प्रमाणात वापर करून घ्यावा. नकाशांचा अभ्यासही गणित शिकवण्यास पूरक आहे.

माध्यमिक आणि उच्च माध्यमिक वर्गातही गणित शिकवताना विद्यार्थ्यांकडून प्रात्यक्षिकं करून घेतल्यास त्यांचा या विषयात रस तर निर्माण होतोच, त्या अनुषंगाने एक प्रकारची चिकित्सक वृत्तीही निर्माण होण्यास मदत होते. उदाहरणार्थ, वर्गात पाय (π = २२/७) या संख्येबाबत चर्चा करण्याची सुरुवात प्रत्येक मुलाला गोल नाणी किंवा कॅरमचा स्ट्राइकर यांचा परिघ आणि व्यास सुतळी किंवा पातळ दोरीने अंकित करून फूटपट्टीवर मोजण्यास सांगावं आणि त्यांचा भागाकार किती येतो ते उत्तर फळ्यावर लिहावं. सगळी उत्तरं बघितल्यावर मुलांना पाय या स्थिरांकाची कल्पना येईल. तसंच त्या विविध उत्तरांची सरासरी का काढावी लागते, ते मोजण्यात कशा प्रकारच्या चुका होतात, उदाहरणार्थ, rounding off error अशा अनेक बाबी विद्यार्थ्यांना या उपक्रमातून शिकवता येतात. पुढे त्यांनी पाय या संख्येबद्दल पुस्तकं, मासिकं आणि वेबसाइटमधून माहिती गोळा करून त्यावर चर्चा केल्यास या विलक्षण आणि अनुभवातीत (transcedental) संख्येबाबत अनेक गोष्टी कळतील.

आणखी असे अंक किंवा संख्या आहेत का, हा प्रश्न साहजिकच त्यांच्या मनात येईल आणि ते स्वतः त्याचं उत्तर शोधून काढण्याचा प्रयत्न करतील. त्यासाठी त्यांना प्रोत्साहन दिलं पाहिजे. बुद्धिबळचा पट, कॅरम बोर्ड हेही भूमितीमधील अनेक कल्पना शिकवण्यास मदत करतात.

गणित शिकवताना जमेल तितक्या आकृत्या, आलेख काढावेत किंवा दाखवावे. याचं कारण म्हणजे चित्रं ही सहसा शब्द आणि अंकापेक्षा जास्त प्रभावकारी ठरतात. याचं उत्तम उदाहरण म्हणजे टीव्हीवरली अनेक चांगल्या जाहिराती ! जाहिरातींमध्ये आवाजाचाही समर्पक वापर केला जातो. म्हणूनच अनेक वेळा फक्त ९० सेकंद या अवधीची जाहिरात त्या विषयावरील ९० मिनिटांच्या भाषणापेक्षा जास्त प्रभावी ठरण्याची शक्यता असते. ही बाब गणितच नव्हे तर इतर विषय शिकवणाऱ्यांनीही लक्षात ठेवली पाहिजे.

गणित शिकवणाऱ्या शिक्षकानेही काही नवीन उपकरणं किंवा साधनं तयार केल्यास विद्यार्थ्यांना एक प्रकारची स्फूर्ती मिळते. शिक्षकांच्या या उपक्रमांना अनेक संस्था मदत करतात तसंच योग्य नावीन्यपूर्ण प्रयोगांना पारितोषिकंही देतात. उदाहरणार्थ, मराठी विज्ञान परिषदेतर्फे दिलं जाणारं 'हरिभाऊ मोटे पारितोषिक'. पाठ्यक्रम पूर्ण करणं, परिक्षांची तयारी करून घेणं, परीक्षा घेणं, इतर अनेक जबाबदाऱ्या आणि व्याप सांभाळून या प्रकारचे उपक्रम होती घेणं हे शिक्षकांसाठी मोठं आव्हान आहे यात काही वाद नाही. पण असा प्रयत्न करणं त्यांच्या स्वतःच्या विकासासाठी आणि विद्यार्थ्यांना प्रेरणा देण्यासाठी आवश्यक ठरतं. शैक्षणिक संस्थांचं मूल्यमापन करण्याची पद्धत आपल्या देशातही सुरू झाली आहे. त्यामध्ये इतर बाबींबरोबर शिक्षकांनी निर्माण केलेलं वैचारिक भांडवल (intellectual capital) किती, याला फार महत्त्व दिलं जातं. म्हणूनच शिक्षकांनाही त्यांची सृजनशीलता वाढवणं गरजेचं ठरत आहे.

कॉलेज तसंच पुढील शिक्षणात गणित शिक्षकांना वयाप्रमाणे आकलनशक्ती वाढलेल्या विद्यार्थ्यांना गणित शिकवताना संकल्पना सांगणं, त्यांची काही उदाहरणं देणं हे जास्त अपेक्षित असतं. सरावासाठी अधिक प्रकारची गणितं सोडवणं आणि विविध संदर्भ बघणं हे विद्यार्थ्यांकडून अपेक्षित असतं. या दृष्टीने काही प्रमाणात गणितातील काही संकल्पना, पद्धती यांचा वापर होईल, अशा 'केस् स्टडीज' चर्चा करण्यासाठी शिक्षकांनी दिल्यास विद्यार्थ्यांमध्ये एक चुरस निर्माण होते आणि गणिती गैरसमज दूर होण्यासही मदत मिळते. मात्र चांगल्या केस स्टडीज तयार करणं हे वाटतं तितकं सोपं नाही. पण

शिक्षकांचे असे प्रयत्न गणिताचा प्रत्यक्षात वापर कसा करता येऊ शकतो याबाबत चांगला प्रकाश टाकू शकतात. तसंच वेळोवेळी गणितज्ज्ञ दोन्ही जे, की फक्त संशोधन करत आहेत आणि जे वापर करत आहेत (इण्डस्ट्री किंवा तत्सम संस्थांतून) यांना आमंत्रित करून त्यांची भाषणं आणि चर्चासत्रं घडवून आणल्यास गणितातल्या विविध शाखांची सद्यस्थिती काय आहे तसंच गणिती पद्धतींचा उपयोग कसा होतोय, हे विद्यार्थ्यांना कळू शकेल.

संशोधनाच्या पातळीवर नियमितपणे शिक्षकांनी आणि संशोधन करणाऱ्या विद्यार्थ्यांनी सेमिनार घेणं गणित या विषयासाठी फारच उपयुक्त ठरू शकतं हे लक्षात घ्यायला हवं. इथे अनेक वेळा अमूर्त बाबींची चर्चा सर्वांसाठी उपयोगी ठरू शकते. अमेरिकेत यासंदर्भात काही संस्थांमध्ये 'Shotgun Seminar' आयोजित केली जातात. म्हणजे सेमिनारचा विषय, वेळ, जागा निश्चित केली जाते. मात्र भाषण कोण देणार, हे जमलेल्या व्यक्तींच्या नावाची सोडत काढून ठरवलं जातं. त्यामुळे सेमिनारसाठी येणाऱ्या प्रत्येकाला पूर्ण तयारी करून यावं लागतं. अन्यथा व्यवस्थितपणे विषय मांडता न आल्यास थट्टा होणं आणि त्यांच्या संशोधन क्षमतेबाबत प्रश्न केले जातात. आपल्या संस्थांमध्येही असे उपक्रम राबवणं गरजेचं ठरू शकतं. म्हणूनच मार्गदर्शकांनी त्यांच्या विद्यार्थ्यांमध्ये एखादा नवीन शोधलेख घेऊन त्याबाबत महिन्यातून एक किंवा दोन वेळा चर्चा करणं तसंच पुस्तकांची समीक्षणं करणं असे कार्यक्रम राबवले पाहिजेत. तसंच विशिष्ट गणिती संशोधनाचा उपयोग दुसऱ्या विषयात उदाहरणार्थ, भौकितशास्त्र, अर्थशास्त्रामध्ये होण्याची शक्यता वाटल्यास शिक्षकाने त्या विषयातील शिक्षकाशी संवाद साधल्यास संशोधनाला नवीन दिशा मिळू शकते.

त्यामुळे गणितासारख्या विषयाच्या अध्यापनातही प्रयोग करणं शक्य असून शिक्षकाने नवीन वातावरणाशी अनुरूप अशी उदाहरणं आणि साधनं वापरून गणित शिकवल्यास विद्यार्थ्यांना फायदाच होईल.

✤

२९

निवडक गणिती दीपस्तंभ

+×∑∫

गणित या विषयातील काही संकल्पना, संरचना आणि पद्धती यांचा उपयोग गणिताव्यतिरिक्त अनेक विषयांत तसंच आपल्या रोजच्या व्यवहारातही व्यापक प्रमाणावर होतो. एका अर्थाने त्या दीपस्तंभासारखा सर्व दिशांना प्रकाशाने भारून टाकण्याचं काम करत असतात. उदाहरणार्थ, शून्याची संकल्पना दशमलव किंवा दशांश पद्धती, 'पाय' आणि 'इ' असे अनुभवातीत अंक (Transcendental Numbers) **इत्यादी. इथे आपण या प्रकारच्या तीन गणिती निर्मितींची चर्चा करणार आहोत.**

१) मुख्य किंवा मूळ संख्या (Prime Numbers):

असा सकृत पूर्णांक (positive integer) ज्याला पूर्णपणे भाग फक्त एक आणि स्वतः त्या अंकाने जात असेल त्या पूर्णांकास प्राइम नंबर असे म्हणतात. २,३,५,७,११,१३ इत्यादी त्याची उदाहरणे आहेत. प्राइम संख्या अंनत आहेत. या संख्यांचा वापर विविध प्रकारे होतो हे विशेष.

प्रत्येक एकहून मोठा पूर्णांक हा प्राइम अंक तरी असतो किंवा दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त प्राइम संख्यांच्या गुणाकारापासून तयार करता येतो. उदाहरणार्थ, १००=२×२×५×५ याला अंकगणिताचा मूलभूत सिद्धांत (The Fundamental Theorem of Arithmetic) असे म्हणतात. एका अंगाने प्राइम संख्या संपूर्ण प्राकृतिक संख्या मालिका (Natural Numbers Series) उभी करू शकतात.

गणितातील अनेक प्रक्रिया आणि उपशाखांमध्ये प्राइम संख्यांचा उपयोग, जसे की घटक अंकगणितामध्ये (Modular Arithmetic) होतो. हल्लीच्या युगात कम्प्युटर वापरताना किंवा कम्प्युटरद्वारे पैशांचे व्यवहार करताना सुरक्षिततेच्या दृष्टीने सांकेतिक शब्द किंवा अंकिय हस्ताक्षर (Password or Digital Singature) यांचे महत्त्व फारच वाढले आहे. यासाठी (Cryptology) म्हणजेच देवाण-घेवाण सांकेतिक भाषेत करणं ही गणिती शाखा निर्माण झालेली आहे. साहजिकच सांकेतिक भाषेत पाठवलेला संदेश फक्त योग्य व्यक्तीलाच फोड करून वाचता येणं हा मूळ उद्देश असतो. या सांकेतिक संदेशाची जडण-घडण व फोड (Encryption and Decryption) करण्यात प्राइम संख्यांचा सहभाग फार मोठा आहे. या संदर्भात रोनाल्ड रिव्हेस्ट, अदी शामिर व लिओनार्ड एडलमन या तीन संशोधकांनी एक पद्धत विकसित केली व तिला आता *आरएसए सिस्टिम* असे म्हणतात. या पद्धतीमध्ये दोन मोठ्या प्राइम संख्या घेऊन (प्रत्येक संख्या शंभर अंकी किंवा त्याहून मोठी असते) त्यांचा गुणाकार वापरला जातो. ही प्रक्रिया कम्प्युटरद्वारे सहज करता येते. या अतिप्रचंड संख्येचा वापर करून आपला संदेश सांकेतिक भाषेतील संदेश म्हणजे संख्या समूह यांच्या रूपात बदलून पाठवणं अशी क्रिया केली जाते. असा सांकेतिक संदेश मूळ स्वरूपात बदलण्यासाठी कुठल्या प्राइम संख्या वापरायच्या हे शोधून काढणं फार कठीण आहे. मात्र योग्य व्यक्तीला त्या वेगळ्या माध्यमातून कळवल्यामुळे फक्त तोच खरा अर्थ लावू शकतो. क्रेडीट कार्ड व नेट बँकिंग प्रणाली अशा प्राइम संख्यांवर आधारित ओळख पद्धतीमुळे जागतिक स्तरावर शक्य झाल्या आहेत. (या संदर्भात एस. सिंग यांचे पुस्तक पहाः Singh, S., *The Code Book*, New York : Doubleday, 1999.)

मात्र प्राइम संख्या तयार करण्यासाठी एखादे सूत्र शोधून काढणं अजूनही शक्य झालेले नाही व हा एक संशोधनाचा विषयच आहे.

२) वर्तुळ (Circle) :

भूमिती (Geometry) मधील वर्तुळ हे मानवी जीवनाशी किती निगडित आहे हे अनेकदा लक्षात येत नाही. मनुष्याचा विकास व सभ्यता चाक किंवा चक्र यामुळे गतिमान झाली. त्यात कुंभाराचे चाक, बैलगाडी व रथाची चाके व रहाट चक्र ही पूर्वीच्या काळात तर आधुनिक युगात आगगाडी, मोटार व विमानाची चाके समाविष्ट आहेत. अत्याधुनिक उपग्रहाद्वारे दळणवळण व वाहनांना मार्गदर्शन करणारी जीपीएस (Global Positioning System) संयत्रणा सुद्धा वर्तुळांच्या व्याप्तीवरच आधारलेली आहे. अगदी सामाजिक व राजकीय क्षेत्रात सुद्धा आतील गोटातील वर्तुळ (inner circle), लागेबांधे यांचे वर्तुळ (social circle) आणि दर्जा सुधारक गट (quality improvement circle) या संरचनेत वर्तुळाचे अनेक गणिती गुणधर्म यांची झाक आढळते.

वर्तुळाचे गणिती योगदान पण भरीव आहे. वर्तुळाचं क्षेत्रफळ किंवा परिघ यांच्या मोजमापातून पाय या अनुभवातीत (Transcendental) संख्येचा दाखला पुढे आला. तसंच त्रिकोणमिती व गणनशास्त्र (Trigonometry & Calculus) यांचा विकास प्रथम सर्क्युलर फंक्शन्स (Sinθ, Cosθ, Tanθ) वरूनच सुरू झाला. तसंच पोलर कोऑरडिनेट्स व कॉम्प्लेक्स संख्या यांचं मूळ पण वर्तुळाच्या विविध घटकांमध्ये दडलेलं आहे. वर्तुळ हे सर्व बंदिस्त आकृत्यांचं (closed or bounded geometrical figures) अंतिम मर्यादित स्वरूप आहे. म्हणजे चौकोनी, षटकोनी, अष्टकोनी इत्यादी आकृतीच्या भुजांची संख्या जसजशी वाढत जाते तसतसे त्या वर्तुळ होण्याच्या मार्गावर लागतात. या व अनेक विशेष गुणांमुळे वर्तुळाचा उपयोग विविध क्षेत्रांत केला जातो. वास्तुशास्त्रात वर्तुळाकाराचा वापर खास प्रभावासाठी केला जातो, उदाहरणार्थ, नवी दिल्ली इथल्या आपल्या संसद भवनाची गोलाकार वास्तू.

भारतीय तत्त्वज्ञानाच्या परितत्त्व गणित शाखेचा मूलाधार वर्तुळ व त्याचे विशिष्ट गुणधर्मच आहेत. (या संदर्भात जी. एस. मूर्ती यांचे पुस्तक पहाः Murty, G. S., *Parattvaganitadarsanam - Egometry of Principles of Transcendental Philosophy of Mathematical Truth,* New Delhi : Motilal Banarsidass Publishers, 2002.)

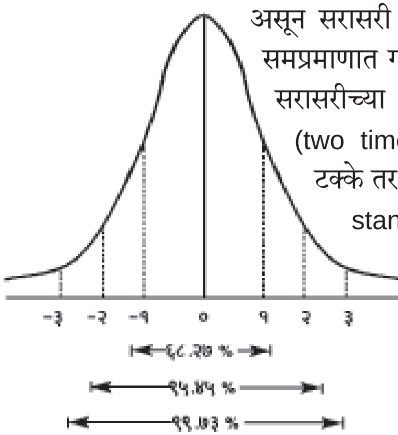
या चर्चेवरून लक्षात येईल, की वर्तुळाची गणिती तसंच इतर क्षेत्रांतील महती वादातीत आहे.

३) सांख्यिकीतील सामान्य वितरण (Normal Distribution):

आर्थिक असो की सामाजिक कुठल्याही क्षेत्रात गोष्टी सुरळीतपणे सुरू आहेत म्हणजे नॉर्मल आहेत याचा सांख्यिकी शास्त्राप्रमाणे अर्थ असा की घडणाऱ्या गोष्टी सामान्य वितरण (Normal Distribution) या संभाव्यता सूत्राप्रमाणे (Probability Density Function) घडत आहे. काही अपवादात्मक स्थिती वगळता मानवी व्यवहार सहसा नॉर्मल डिस्ट्रिब्युशन या संकल्पनेप्रमाणेच होत असतात, म्हणूनच या सांख्यिकी वितरण पद्धतीचे महत्त्व अनन्यसाधारण असे आहे. म्हणूनच त्याला आद्य वितरण (Mother of all Distributions) असेही म्हटले जाते. याला मुख्य कारण म्हणजे काळाच्या ओघात कुठलीही प्रक्रिया शेवटी नॉर्मल डिस्ट्रिब्युशनप्रमाणे काम करायला लागते. अर्थातच संपूर्ण सांख्यिकीशास्त्राचा हे वितरण कणाच आहे.

सामान्य वितरणाचा आलेख घंटेच्या आकारासारखा असतो (सोबत दिलेली आकृती पाहा.) या आलेखाचा व त्याच्या गणिती सूत्राचा गहन अभ्यास प्रसिद्ध गणितज्ज्ञ कार्ल फ्रेड्रीक गौस यांनी सर्वप्रथम केला. त्यामुळे हा आलेख गौसियन कर्व्ह या नावानेही उल्लेखला जातो. जरी या आलेखाचे गणिती सूत्र खूप जटील असले तरी त्याची गरज भासत नाही. कारण एका सरल गणिती रूपांतराने त्याचे परिवर्तन प्रमाण सामान्य वितरण (Standard Normal Distribution) या प्रकारात होते ज्याची सरासरी शून्य व प्रमाण विचलन एक (Mean = 0 & Standard Deviation = 1) असे असते. या रूपांतरित वितरणाबाबत तक्ते उपलब्ध असल्यामुळे वापर सुलभ होतो.

सोबतच्या आकृतीवरून लक्षात येईल की नॉर्मल डिस्ट्रिब्युशन हे प्रमाणबद्ध असून सरासरी बिंदूच्या दोन्ही बाजूस ५० टक्के या समप्रमाणात गोष्टी असण्याची संभाव्यता दर्शवतात. सरासरीच्या दोन्ही बाजूस दोन प्रमाण विचलनात (two times standard deviation) ९५.४५ टक्के तर तीन प्रमाण विचलनात (three times standard deviation) ९९.७३ टक्के या प्रमाणात सर्वसामान्यपणे गोष्टी असतात. या तसंच इतर अनेक गुणधर्मांमुळे या वितरणाचा वापर विविध क्षेत्रांत होतो. उदाहरणार्थ, कुठल्याही संशोधनात सिद्धांतकल्पना



पडताळणं म्हणजेच हायपोथिसिस टेस्टिंग (Hypothesis Testing) यासाठी तसंच कुठल्याही वस्तीत किंवा शहरात डॉक्टर, वकील, प्लम्बर असे विविध सेवा देणारे घटक किती प्रमाणात सामान्यतः असावेत याची कल्पना (Norm Fixing) या नॉर्मल डिस्ट्रिब्युशनद्वारे काढता येतं.

या वितरणाचा एक प्रमुख उपयोग मालाचा दर्जा तपासणं (Quality Checking) यासाठी मोठ्या प्रमाणावर होतो. त्यासाठी विविध प्रकारचे तक्ते (Control Charts) या वितरणाच्या आधारे तयार केले जातात. १९८० मध्ये अमेरिकेतील मोटोरोला कंपनीतील बील स्मिथ या संशोधकाने मालाचा दर्जा उंचावण्यासाठी एक पद्धती विकसित केली जिला 'सिक्स सिगमा' (Six Sigma) असे म्हणतात. ही पद्धत नॉर्मल डिस्ट्रिब्युशनचा आधार घेते व असे सांगते की सर्व उत्पादनप्रक्रिया अशा प्रकारे पार पाडल्या पाहिजेत की वस्तू नाकारण्याचे प्रमाण सहा प्रमाण विचलनाच्या (Six times standard deviation) पलीकडे पाहिजे. म्हणजे प्रत्यक्षात जर दहा लक्ष गोष्टी तयार केल्या तर त्यातील नाकारण्याइतक्या गोष्टी ३.४ हून कमी पाहिजे. हे उद्दिष्ट ठेवून आता सर्व उत्पादन व सेवा पुरवठा कंपन्या काम करण्याचा प्रयत्न करतात.

एका अर्थाने नॉर्मल डिस्ट्रिब्युशनचा शोध हा समाजाला दिशा देण्यासाठी फारच उपयुक्त ठरला आहे. गणिताचा अभ्यास व संशोधन यामुळेच महत्त्वाचे आहे. भलेही वापर होण्यास वेळ लागतो.

✤

३०

गणिती साधनं आणि उपकरणं

+× ∑ ∫

कॅलक्युलेटर आणि कम्प्युटर यांच्या वापराने आकडेमोड करणं खूपच सोपं झालं. पण यामुळे साधारण आकडेमोड किंवा हिशोब करण्याचं माणसाचं कौशल्य लुप्त तर होणार नाही अशी भीती व्यक्त केली जातेय. पण यासाठी गणिती साधनं आणि उपकरणं यांना दोष देता येणार नाही. माणसाला मोठमोठे हिशोब चटकन करता यावेत आणि त्यामुळे मोठे प्रोजेक्ट हाती घेता यावेत, यासाठी अशी साधनं विकसित करण्यात आली.

माणसाच्या प्रगतीसाठी गणिती साधनांचा विकास होत गेला. शेतीसाठी आवश्यक पाऊस, हवामान, ऋतु आदींचं गणित मांडावं लागायचं. तसंच नैसर्गिक कुतुहलामुळे खगोलशास्त्राचा अभ्यासही फार पूर्वीपासून आपल्याकडे होत आहे. अशा सगळ्याच कामात गणिताची महत्त्वाची भूमिका आहे. यासाठी वेगवेगळ्या प्रकारची साधनं तयार करण्यात आली. तसंच लांब पल्ल्याच्या समुद्रसफारीसाठी, दिशा आणि अंतर मोजण्यासाठी काही विशिष्ट उपकरणं विकसित करणं भाग पडलं. घर, राजवाडे, किल्ले आणि धार्मिक

स्थळांची रचना तसंच रस्ते, पूल किंवा धरणे बांधणं हे गणिती नियोजन पद्धतीशिवाय अशक्य आहे. हे सर्व मोठमोठे हिशोब तोंडी सोडवणं शक्य नव्हतं. साहजिकच अशा कठीण गणितांसाठी काही खास प्रकारची उपकरणं बनवण्यात आली. कम्पास, चेन, क्वाड्रण्ट, सेक्सटण्ट, ऑक्टण्ट, इक्वेटोरियम, टॉरक्वेटम, ॲस्ट्रोलेव, प्रोट्रॅक्टर, प्लंब लेव्हल, थेडोलाइट, ग्राफोमीटर, ट्रिग्नोमेट्रिक मशीन अशा अनेक साधनांच्या मदतीने आवश्यक ती मोजमापं घेऊन गणितं सहज सोडवता आली. तसंच विभिन्न क्षेत्रांत प्रगती शक्य झाली. पिरॅमिड बांधण्यापासून ते जम्बो जेट तयार करण्यापर्यंतच्या सर्व मानवी विकास–प्रवासात गणित आणि गणिती साधनांचा हातभार फार मोलाचा आहे. वैज्ञानिक वस्तुसंग्रहालयांमध्ये अनेक प्राचीन गणिती साधनं आढळतील.

मानवी अवयव उदाहरणार्थ, हातापायाची बोटं यांचा वापर अंकगणित करण्यासाठी करणं ही सुरुवात होती. पण त्यांची मर्यादा लक्षात आल्यावर लिखित स्वरूपात गणित करण्यासाठी पाटी, पेन्सिल, फळा, खडू, कागद, पेन, शाई, बॉलपेन तसंच मोजपट्टी, टेप, ग्राफपेपर, प्रोटेक्टर आणि कम्पास बॉक्समधील इतर साधनं या प्राथमिक गणिती साधनांचा विकास झाला. आजही त्याच किंवा त्यांच्या प्रगत स्वरूपात ही साधनं वापरली जात आहेत. कम्प्युटरमध्येही ही साधनं आहेत. अवकाशयानात, जिथे गुरुत्वाकर्षण नसल्यामुळे पेनमधील शाई खाली कागदावर उतरणं शक्य नसतं आणि शिस–पेन्सिल ज्वलनशील असल्यामुळे वापरता येत नाही. त्यासाठी अमेरिकेतील 'फिशर' पेन कंपनीने संशोधनासाठी चार कोटी रुपये खर्च करून 'स्पेस' पेन आणि नुकतीच 'शटल' पेनं विकसित केली आहेत. त्याची किंमत प्रत्येकी दोन हजार रुपये आहे. थोडक्यात गणिती आणि इतर साधनांना विकास सतत करणं आवश्यक ठरत आहे.

गणिताच्या विविध साधनांमध्ये 'लोगॅरिथम टेबल्स' यांचा विकास ही एक महत्त्वाची उपलब्धता मानली जाते. मोठ्या संख्यांचे गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ अशा अनेक जटिल प्रक्रियांसाठी या तक्त्यांचा वापर फार उपयोगी पडतो. स्कॉटलण्डमधील जॉन नेपियर (१५५०–१६१७) यांनी ही कोष्टकं त्यांच्या सन १६१४ मध्ये प्रसिद्ध झालेल्या *'डिस्क्रिप्शन ऑफ द मार्व्हलस कॅनन ऑफ लोगॅरिथम्स'* या ग्रंथात मांडली. आता ती आपल्या गणिताच्या पाठ्यपुस्तकात समाविष्ट असतात. त्याचबरोबर त्यांनी एक कॅलक्युलेटर विकसित केला होता. त्यात छड्यांच्या संचाचा वापर होतो. त्या छड्यांना

'नेपियर्स बोन्स' म्हटलं जातं. लोगॅरिथम्स या गणिती पद्धतीमुळेच खगोलशास्त्रज्ञ जोहनेस केपलर याला मंगळाचा सूर्याला प्रदक्षिणा घालण्याचा मार्ग आखणं तसंच संपूर्ण खगोलशास्त्राला नवीन दिशा देणारे तीन नियम शोधून काढणं शक्य झालं. कारण या सर्व कामात १५ वर्षांहून अधिक काळ एकत्रित केलेली अवकाशातील विविध ग्रहांची निरीक्षणं आणि इतर माहितीचे कठीण गणिती विश्लेषण त्याला करावं लागलं. याच प्रकारचे तक्ते सांख्यिकी शास्त्रातील पद्धती वापरण्यास उपयोगी ठरतात. उदा., नॉर्मल डिस्ट्रिब्युशन टेबल्स, काय स्क्वेअर डिस्ट्रिब्युशन टेबल्स आणि रॅण्डम नम्बर्स टेबल्स. हे सगळे तक्ते आजही वापरात आहेत. त्याचप्रमाणे त्रिकोणमितीच्या वापरासाठीही तक्ते निर्माण करण्यात आले. (उदा. sinθ, cosθ, tanθ ची Tables)

लोगॅरिथम तक्ते असलेल्या पुस्तकाला पर्याय शोधून काढण्यासाठी अनेक प्रयत्न झाले. विल्यम्स ओघट्रेड, रिचर्ड डेलमिन, पीटर रोजेट (ज्याने इंग्रजी भाषेचा ज्ञानकोश (Thesaurus) तयार केला) अशा अनेक संशोधकांनी यासाठी यांत्रिकी प्रणाली विकसित केल्या (Mechanical Systems). यात सर्वात उपयुक्त ठरली ती फ्रेन्च लष्करी अधिकारी अेमेदी मान्झिम याने विकसित केलेली चार पट्ट्या आणि मागेपुढे फिरवता येण्याची निर्देशक चकती अशी यंत्रणा अर्थातच स्लाइड रूल (Slide Rule). सन १८५० मध्ये तयार केलेल्या या संयंत्रात पुढे अनेक सुधारणा करण्यात आल्या. विविध साधनसामग्री (लाकूड, पुट्ठा, प्लास्टिक) वापरून तसंच त्याचे प्रमाणबद्ध रूप (Standard form) तयार करण्यात आले. स्लाइड रूल हा इंजिनीअरिंग शिक्षणाचा अविभाज्य भाग बनला आणि अजूनही तो कसा वापरावा याचा त्या पाठ्यक्रमात समावेश आहे. न्यूयॉर्कमधील गगनचुंबी एम्पायर बिल्डिंग बांधण्यापासून ते चंदीगढ शहर वसवणं आणि रशियन स्पुटनिक या अवकाशयानाची रचना करण्यात स्लाइड रूलचीच मदत झाली आहे हे विसरून चालणार नाही. अल्बर्ट आइनस्टाइन यांना स्लाइड रूलचा वापर करणे आवडत असे. मात्र १९७० मध्ये इलेक्ट्रॉनिक्स टेक्नॉलॉजीच्या विकासामुळे कॅलक्युलेटर आणि नंतर कम्प्युटरच्या प्रचंड ताकदीमुळे गणिती आकडेमोडीत उपयुक्त ठरलेला स्लाइड रूल हे कालबाह्य साधन झालं. एका अर्थाने स्लाइड रूल आणि टेलिग्राफ या दोघांचा इतिहास समांतर आहे.

स्लाइड रूल आणि कॅलक्युलेटर यांच्या मधल्या काळात 'फेसिट' मशीन या इलेक्ट्रो-मेकॅनिकल यंत्राचा वापर गणित आणि सांख्यिकी क्षेत्रात मोठ्या

प्रमाणावर होत असे. अनेक वर्षं कॉलेजच्या गणिती पाठ्यक्रमात फेसिट मशीन वापरून गणितं सोडवण्याच्या प्रात्यक्षिकांचा समावेश होता. त्याची परीक्षाही घेतली जात असे. आकाराने सुटसुटीत, वापरण्यास सुलभ आणि माफक किंमतीमुळे कॅलक्युलेटर हे गणिती साधन मागील काही दशकांत लोकप्रिय ठरलं. अंकगणित, ट्रिग्नोमेट्री, वित्तीय ताळेबंदाची आकडेमोड अशा अनेक गणिती प्रक्रिया कोणालाही करणं त्यामुळे शक्य झालं. त्यापलीकडे जाऊन आलेख तयार करणं, गणिती चित्रं द्विमिती आणि त्रिमितीत निर्माण करणं अशा अनेक सुविधा असणाऱ्या कम्प्युटरमध्ये आतापर्यंत निर्माण केलेल्या सर्व गणिती साधनांची क्षमता एकत्रित केलेली आढळते. म्हणूनच गणिती प्रक्रिया सुलभ करणाऱ्या सर्वसाधारण सॉफ्टवेअर वापरण्याचं प्रशिक्षण विद्यार्थी आणि संशोधकांनी घेणं ही काळाची गरज आहे.

गणितात रस निर्माण होणं आणि गणिती संकल्पना समजणं तसंच वापरणं यासाठीही आता विविध साधनं उपलब्ध आहेत. यामध्ये प्रत्येक वयोगटासाठी सीडी, पुस्तकं, क्रियाशील पुस्तिका (activity notebooks) आणि कोडी यांची पुस्तकं विकसित केली गेली आहेत. या पुस्तकांची किंमत ५० रुपयांच्या घरात सहसा असते. त्याचबरोबर अनेक प्रकारची खेळणीही उपलब्ध आहेत. त्यांची किंमत १५० ते २०० रुपयांपर्यंत असते. काही संस्था ही साधनं नुसतीच विकत नसून त्यांचा वापर कसा करावा याचं प्रशिक्षणही देतात, तर काही संस्था खेळण्यांचे ग्रंथालय (toys library) ही कल्पना राबवून मुलांना माफक मासिक शुल्क आकारून अशी साधनं मर्यादित काळापुरती घरी नेण्यास देतात. उदाहरणार्थ, *मराठी विज्ञान परिषद* (दूरध्वनीः ०२२–२४०५४७१४, ०२२–२४०५७२६८) आणि *कुतूहल संस्था* (दूरध्वनीः ०२२–६५७८८४८८) या मुंबईतील संस्था असे विविध उपक्रम राबवतात. हे उपक्रम महाराष्ट्रात इतर ठिकाणीही सुरू करणं उपयुक्त ठरेल. गणिताची भीती लहान वयातच दूर करणं त्यामुळे शक्य होईल.

कम्प्युटरमुळे गणिती संशोधनाला नवीन दिशा देण्याचं कामही सुरू आहे. उदा., लिनिअर किंवा मॅथेमेटिकल प्रोग्रामिंग या गणिती विषयात नवीन पद्धती आवर्तन (recursive) प्रकारची असण्यावर भर देण्यात येतो. कारण कम्प्युटर अशा प्रकारे काम करण्यास सर्वोत्तम आहे. गणिती साधनं आणि उपकरणं यांचा जास्तीत जास्त प्रमाणावर उपयोग करून घेणं सगळ्यांसाठी लाभदायक ठरेल हे नक्कीच !

✤

३१

वेळेचं गणित

+×∑∫

आजच्या धावपळीच्या आयुष्यात सगळ्यांनाच एका वेळी अनेक गोष्टी करायच्या असतात. कोणाला शाळा-कॉलेज, अभ्यास आणि इतर ॲक्टिविटीज सांभाळायच्या असतात, तर कोणाला ऑफिस आणि घराकडे लक्ष द्यायचं असतं. अशा वेळेस महत्त्वाचं असतं, ते टाइम मॅनेजमेण्ट. एकाच वेळेला एकापेक्षा अधिक गोष्टी व्यवस्थितपणे पार पाडण्यासाठी कोणत्या गोष्टीला प्राधान्यानुसार वेळ द्यायचा हे ठरवण्याची कला गणितातून साध्य होऊ शकते. रोजच्या व्यवहारात तसंच इतर अनेक बाबतींत यश मिळवण्यासाठी ही कला आत्मसात करायला हवी.

'**गो**पाळ एक काम सहा तासात पूर्ण करतो, तर अजयला तेच काम पूर्ण करण्यासाठी दहा तास लागतात. त्यांनी ते काम एकत्रपणे केल्यास ते काम किती वेळात पूर्ण होईल ?' अशी काळ, काम आणि वेग या घटकांवर

आधारित अनेक गणितं आपण शाळेत सोडवली आहेत. त्या वेळी काही विद्यार्थ्यांच्या मनात असा प्रश्न आला असेल, की आपण काढलेलं उत्तर प्रत्यक्षात बरोबर ठरेल का ? कारण गोपाळ आणि अजय हे सहकार्याने काम करतील, ते भांडणार नाहीत, बोलण्यात उगीच वेळ फुकट घालवणार नाही अशी अनेक गृहितकं (assumtions) गणितं सोडवताना मानलेली असतात. त्यातील एखादी शंका उपस्थित केल्यास शिक्षक दुर्लक्ष तरी करतात किंवा भलतेसलते प्रश्न विचारू नको, गणित नीट सोडव, अशी तंबी त्या विद्यार्थ्याला देतात. अशा अनेक बाबी गणिताबाबत अढी निर्माण होण्यास कारणीभूत ठरू शकतात.

परंतु, व्यवहारात निर्णय घेताना वर नमूद केलेल्या प्रश्नांसारख्या विविध गोष्टींचा विचार करावा लागतो. वेळेचं गणित सोडवताना म्हणजेच वेळ कसा वापरावा किंवा वेळेचं नियोजन करताना हे मुद्दे लक्षात घ्यावे लागतात. ॲडमिनिस्ट्रेशन आणि मॅनेजमेण्ट या क्षेत्रातील व्यक्तींकडे हे गणित हाताळायचं खास प्रशिक्षण असणं आवश्यक आहे.

वेळेचं गणित म्हणजे वेळापत्रक सुयोग्यपणे तयार करणं. एका अर्थाने बस, रेल्वे, विमान अशा परिवहन सेवांचं नियोजन; वेळ, पायाभूत सुविधा आणि वाहन यांची क्षमता आणि ग्राहकांची मागणी अशा महत्त्वपूर्ण घटकांची सांगड घालणं या प्रकारच्या गणिताचं रूप आहे.

शैक्षणिक क्षेत्रातही असे प्रश्न सोडवावे लागतात. उदाहरणार्थ, वर्गांची उपलब्धता, शिक्षक समूह आणि अभ्यासक्रम यांचा समन्वय साधणं, परिक्षाचं वेळापत्रक तयार करणं हेही याचाच एक भाग. मोठमोठ्या हॉस्पिटल्स, तसंच फाइव्हस्टार हॉटेल्समध्ये पेशण्ट्स आणि कस्टमर्सना क्रमशः वेळेवर सेवा द्यावी लागते. यात वेळेचं नियोजन आणि मनुष्यबळ व्यवस्थापन या बाबी सक्षमपणे हाताळाव्या लागतात. राष्ट्रीय आणि आंतरराष्ट्रीय स्तरावर क्रीडा स्पर्धा आयोजित करतानाही वेळेचं गणित सांभाळावं लागतं. अशी गणितं सोडवताना अनेक तांत्रिक घटक आणि मानवी भावना, सवयीही लक्षात घेणं आवश्यक आहे.

साहजिकच, वर नमूद केलेल्या समस्यांमधील गणिती भाग हाताळण्यासाठी विविध प्रकारच्या गणिती पद्धतींचा वापर केला जातो. यात मुख्य पद्धती पुढीलप्रमाणे:

- Sequencing & Scheduling
- Network Analysis (PERT & CPM)
- Regression Analysis
- Time Series Analysis
- Linear and Nonliner Programming
- Theory of Constraints
- Pigeonhole Principle
- Constraint Programming

गेल्या काही वर्षांत Time tabling चा गणिती अभ्यास वाढला आहे. बऱ्याच गणिताशी संलग्न आंतरराष्ट्रीय परिषदांमध्ये आता या विषयावर एक स्वतंत्र सत्र आयोजित करण्यात येतं. आपल्या देशातही याबाबत संशोधनाला सुरुवात झाली आहे. याचा उपयोग काही प्रमाणात रेल्वे गाड्यांचं वेळापत्रक तयार करण्यासाठी होत आहे. यासाठी सिम्युलेशन (Simulation) या कम्प्युटराधारित सर्वसामान्य तंत्राचा वापर मोठ्या प्रमाणावर केला जातो.

वैयक्तिक पातळीवरही हे तंत्र आत्मसात करायला हवं. वेळेचं गणित सोडवणं, हे आजच्या तीव्र स्पर्धेच्या युगात महत्त्वाचं ठरत आहे. उदाहरणार्थ, परीक्षेसाठी किती वेळ अभ्यास करावा ? हा वेळ प्रत्येक विषयासाठी किती प्रमाणात असावा ?

याबाबत नमुना म्हणून मिळवलेल्या काही विद्यार्थ्यांनी परीक्षेपूर्वी दोन आठवडे केलेल्या अभ्यासाच्या दिवसांतील तास आणि त्यांना मिळालेल्या गुणांची टक्केवारी या माहितीचं विश्लेषण करू या :

तास (क्ष) :	४	९	१०	१४	४	७	१२	२२	१	१७
टक्के गुण (ज्ञ) :	३१	५८	६५	७३	३७	४४	६०	९१	२१	८४

स्टॅटिस्टिक्समधील लिनिअर रिग्रेशन ॲनालिसिस (Linear Regression Analysis) या तंत्राचा वापर करून ही माहिती पुढील सूत्राने बांधता येतेः

$$ज्ञ = २१.७ + ३.५ \; क्ष$$

याचाच अर्थ, जर कोणी दर दिवशी ११ तास अभ्यास केला असेल, तर त्याला ६०.२ टक्के मार्क्स मिळणं अपेक्षित आहे; असं हे सूत्र सांगतं. (यासाठी वरील सूत्रात 'क्ष'च्या जागी ११ ही संख्या लिहा आणि तिला ३.५ ने गुणा आणि मिळालेल्या उत्तरात २१.७ ही संख्या मिळवा.) याचा अर्थ असा काढू नये, की जर अभ्यास केलाच नाही (क्ष = ०), तरीही

२१.७ टक्के मार्क्स मिळतील. गणिती पद्धती वापरताना अशा प्रकारचं तारतम्य बाळगायाला हवं.

काम (क), झोप (झ) आणि मनोरंजन (म) यांसाठी दिवसाचे २४ तास हे बंधन पाळून वेळेचं व्यवस्थापन पुढील प्रकारचं कठीण गणित सोडवून करता येऊ शकतंः

कमाल मूल्य काढणं (Maximize) $ज्ञ = २०क^{३/२} झ^{३/४} म^{१/१०}$

जेव्हा क + झ + म = २४ आणि क, झ आणि म यांचं मूल्य शून्यापेक्षा अधिक पाहिजे. यासाठी जॉमेट्रिक प्रोग्रामिंग (Geometric Programming) सारखी उच्च गणिती पद्धती वापरावी लागते. अर्थातच प्रश्नाला या स्वरूपात मांडण्यासाठीही बरीच माहिती गोळा करणं आणि त्यावर मानसशास्त्रीय आणि गणितीय सोपस्कार करणं भाग पडतं.

एक प्रकारचं ढोबळ गणित आपल्याला नवीन ज्ञान मिळवण्यासाठी म्हणजेच अद्ययावत राहण्यासाठी किती प्रमाणात वेळ दिला पाहिजे याचं मार्गदर्शन करतं. जर, तीन वर्षं पदवी शिक्षण घेताना जमवलेलं ज्ञान भांडार, दर वर्षी कालबाह्य होणाऱ्या ज्ञानाचा दर ५ टक्के आणि नवीन ज्ञान मिळवण्याचा दर हा पदवी शिक्षण घेताना होता तेवढाच राहील असं मानलं, तर उत्तर असं येतं की, किमान १५ टक्के वेळ आपल्याला आता नवीन ज्ञानार्जनासाठी देणं भाग आहे. अर्थातच वयोमानाने हा वेळ वाढवणं जरुरी ठरेल. प्रत्येकाने याबाबत विचार करायला हवा. वेळेचं गणित वेळोवेळी मांडूनच समाजात टिकून राहता येईल. कारण नवीन ज्ञान आणि तंत्रज्ञान हाताळण्याचं कसब नसलेल्या व्यक्तींना पुढे येण्याच्या संधी मिळणं दुरापास्त असेल.

वेळ किंवा काळ म्हणजे काय, याबाबत भौतिकशास्त्रात बरंच संशोधन सुरू आहे. त्यासाठी नवीन प्रकारच्या गणिती पद्धतींचा विकास केला जात आहे. मात्र वेळेच्या विभिन्न छटा किंवा मिती उदाहरणार्थ, बायोलॉजिकल, सायकॉलॉजिकल आणि सोशियोलॉजिकल यांचा अभ्यास गणिताच्या चौकटीत कसा करता येईल यावर संशोधन प्राथमिक अवस्थेत आहे. तरी वेळेचं गणित सोडवणं हे सामान्य व्यक्तींपासून ते संशोधक या सर्वांना सर्व वेळ आव्हान देत राहील असं चित्र आहे. मात्र वेळेचं गणित नीट सोडवल्यास अनेक गोष्टी करणं शक्य आहे हे पीटर रोजेट (१७७९–१८६९) या इंग्रजी भाषेचा ज्ञानकोश (Thesaurus) तयार करणाऱ्या व्यक्तीने आयुष्यात काय काय केलं हे वाचून लक्षात येईल.

✤

३२

'जर-तर'चं गणित

+× ∑ ∫

आयुष्यात पुढे घडणाऱ्या गोष्टी आपल्याला कळू लागल्या, तर जगण्यातली उत्सुकता कमी होऊन जाईल. आयुष्यात येणारी परिस्थिती लक्षात घेऊन त्या दृष्टीने निर्णय घ्यावे लागतात. एक प्रकारे हे आव्हानच असतं. मात्र भविष्यात काय दडलंय हे जाणून घेण्यासाठी माणसाने अनेक प्रकारे प्रयत्न केले आहेत. हस्तरेषा परीक्षणापासून ते प्रगत कम्प्युटराइज्ड् सिम्युलेशन अशा असंख्य प्रणालींचा समावेश त्यात होतो. गणितात याबाबत वेगळ्या तऱ्हेने विचार केला जातोय.

दैनंदिन भाषेत आपण कोणती घटना घडेल किंवा कसे, हे 'शक्यता' या शब्दात व्यक्त करतो. काही अपवाद वगळता कोणतीही गोष्ट करण्याची शक्यता (possibility) नाकारता येत नाही. मात्र तिची संभाव्यता (probability) काय आहे, हे गणिती रूपात मांडता येतं. यामुळे पुढे काय घडू शकेल याचं मोजमाप करणं आणि त्यानुसार निर्णय घेणं यास शास्त्रीय

बैठक मिळते. जेम्स बर्नोली (१६५४-१७०५) आणि ब्लेस पास्कल (१६२३-१६६२) या दोघांना संभाव्यता सिद्धान्त (Theory of Probability) विकसित करण्याचं श्रेय दिलं जातं. जुगारातील हार-जीत/चढ-उतार याचा अभ्यास या विषयाच्या निर्मितीला कारणीभूत झाला.

संभाव्यता मोजण्यासाठी एका सोप्या सूत्राचा वापर केला जातो. कोणतीही घटना घडण्याच्या 'न' अशा संपूर्ण (exhaustive), स्वतंत्र (exclusive) आणि सम प्रमाणात (equally likely) घडणाऱ्या गोष्टी असतील आणि त्यातील 'म' गोष्टी 'अ' हा एखादा प्रसंग घडवून आणण्यास अनुकूल असतील तर 'अ' ची संभाव्यता

$$प(अ) = \frac{म}{न}$$

या सूत्राने काढता येते.

उदा. एक ते सहा असे ठिपके असणारा फासा टाकला तर सम संख्या (दोन किंवा चार किंवा सहा) त्याच्या पृष्ठभागावर येण्याची संभाव्यता काढण्यासाठी 'म' आणि 'न' चं मूल्य ठरवावं लागेल. इथे सहापैकी कुठलाही अंक पृष्ठभागावर सम प्रमाणात येणं शक्य असल्यामुळे 'न'चं मूल्य सहा, तर सम संख्या येण्याचे तीन प्रकार असल्यामुळे 'म'चे मूल्य तीन आणि त्यामुळे सम संख्या येण्याची संभाव्यता म/न = १/२ = ०.५, म्हणजेच फासा टाकण्याची प्रक्रिया बराच वेळ सुरू ठेवली, तर सम संख्या ५० टक्के या प्रमाणात मिळेल. प(अ) = ० म्हणजे असंभव, तर प(अ) = १ म्हणजे १०० टक्के खात्री आणि १-प(अ) घटना न घडण्याची संभाव्यता दाखवतात.

एकापेक्षा अधिक घटना असतील आणि त्या एकमेकांशी संबंधित असतील किंवा नसतील किंवा एक घटना घडून गेल्यावर दुसरी घटना कितपत घडेल (conditional probability) अशा प्रकारच्या विविध घटनांची संभाव्यता बीजगणितातील काही संकल्पनांचा वापर वरील सूत्रावर आवश्यक असे सोपस्कार करून काढता येते. सोयीसाठी अशी विविध सूत्रं उपलब्ध आहेत. या प्रकाराच्या प्रश्नांसाठी एकूण घटना, अनुकूल (किंवा प्रतिकूल) घटना आणि त्यांचा क्रम आणि एकमेकांतील संबंध जाणून त्यानुसार सूत्र निवडावं लागतं. यासाठी विविध प्रश्न सोडवून सराव करायला हवा. बीजगणितातील permutation आणि combination यांचा अभ्यास सखोलपणे केल्यास संभाव्यता काढण्यास मदत होते.

संभाव्यता या संकल्पनेवरच संपूर्ण सांख्यिकी शास्त्र (स्टॅटिस्टिक्स) उभं आहे. विविध निरीक्षणांवरून असं आढळतं, की अनेक बाबी घडण्याच्या संभाव्यता काही विशिष्ट प्रकारच्या आलेखाद्वारे दर्शवता येतात. त्यांचं गणिती सूत्रात रूपांतर करून आकडेमोड करणं सोपं होतं. त्यांना probability distribution म्हणतात. उदा., कोणतीही रांग सहसा Poisson distributon प्रमाणे निर्माण होते. (रांगेचं गणित हे या पुस्तकातील प्रकरण क्र. ६ पाहावे.) यामुळे व्यावसायिक तसंच अनेक क्षेत्रांतील अनिश्चितता यांचा अभ्यास करून संभाव्यता लक्षात घेऊन योग्य निर्णय घेण्यास मदत मिळते.

काही वर्षांपूर्वी स्पेनमधील एका राजकीय निवडणुकांचे निकाल, त्या आधीचा निवडणूक निकाल आणि निवडक मतदारांनी मत दिल्यावर विचारलेल्या प्रश्नांना दिलेल्या उत्तरांचा (exit poll) संभाव्यता सिद्धान्त यातील Bayes' formula वापरून वर्तवले गेले आणि ते जवळजवळ १०० टक्के बरोबर आले. म्हणूनच सांख्यिकी शास्त्र आणि त्यातील संभाव्यता सिद्धान्त यांना जगात महत्त्वाचं स्थान आहे. कम्प्युटरद्वारे भाषांतर करण्यासाठीसुद्धा उपरोक्त संभाव्यता सूत्राचा उपयोग केला जातो, हे विशेष.

संभाव्यता सिद्धांताचा उपयोग आपण वेगळ्या प्रश्नासाठी बघूया. एका खोलीत कमीतकमी किती व्यक्ती पाहिजेत, जेणे करून त्यातील किमान दोन व्यक्तींचा वाढदिवस एकाच दिवशी असेल याची संभाव्यता ५० टक्क्यांहून अधिक असेल (birthday problem). इथे लीप वर्ष मानून वर्षाचे ३६६ दिवस धरल्यास खोलीत येणाऱ्या प्रथम व्यक्तीचा वाढदिवस खोलीतील व्यक्तीच्या वाढदिवसापासून भिन्न असण्याची संभाव्यता ३६५/३६६ अशी असेल, तर त्यानंतरच्या व्यक्तीची ३६४/३६६ आणि असा क्रम सुरू राहील. सर्वसामान्यपणे 'ज' या व्यक्तीचा वाढदिवस खोलीत उपस्थित असलेल्या आणि इतर दिवशी वाढदिवस असलेल्या व्यक्तींपेक्षा वेगळा असण्याची संभाव्यता,

$$\frac{३६६ - (ज-१)}{३६६} = \frac{३६७-ज}{३६६}$$ एवढी असेल.

दुसऱ्या अर्थाने 'न' व्यक्तींपैकी दोन व्यक्तींचा वाढदिवस एकाच दिवशी असण्याची संभाव्यता :

$$१ - \left(\frac{३६५}{३६६} \times \frac{३६४}{३६६} \times \frac{३६३}{३६६} \times \ldots \times \frac{३६७-न}{३६६}\right)$$ अशी असेल.

जर वरील सूत्रात 'न'चे मूल्य २३ ठेवलं तर उत्तर ०.५०६ येतं. म्हणजेच २३ पेक्षा अधिक व्यक्ती असतील तर त्यातील दोघांचा वाढदिवस एकाच दिवशी असण्याची संभाव्यता ५० टक्क्यांहून अधिक असेल, तर समूहात ५६ व्यक्ती असल्यास ही संभाव्यता ९९ टक्के इतकी असेल.

जे. आर. गॉट यांनी संभाव्यता सिद्धान्ताचा वापर करून कोणतीही वास्तू किंवा प्रक्रिया किती काळ टिकू शकेल, याबाबत एक सूत्र तयार केलं आणि त्याची काही प्रात्यक्षिकंही दिली (या संदर्भात जे. आर. गॉट यांचा लेख पहा : J. R. Gott III, "Implications of the Copernican Principle for Our Future Prospects", *Nature*, Vol. 363, 1993, pp. 315-319)

यात त्यांनी असं म्हटलं आहे, की स्वैरपणे (randomly) कोणतीही गोष्ट किंवा प्रक्रिया बघितली तर ९५ टक्के संभाव्यता अशी आहे, की त्या गोष्टीचं पुढील आयुष्य त्याच्या आतापर्यंतच्या आयुष्याचा १/३९ ते ३९ पट याच्यामध्ये असेल. उदा., त्यांनी सहजपणे १९६९ मध्ये जर्मनीला विभागणाऱ्या प्रसिद्ध बर्लिन भिंतीला भेट दिली. त्या वेळी ती भिंत बांधून आठ वर्षं झाली होती. त्यांच्या वरील सूत्रानुसार ती भिंत आणखी किमान २.४ वर्षं ते कमाल ३१२ वर्षं टिकण्याची संभाव्यता ९५ टक्के होती. ती भिंत १९८९ मध्ये पाडली गेली. याच सिद्धान्ताचा आणि सूत्राचा वापर करून त्यांनी मानवजात पृथ्वीवर किती वर्षं टिकेल याचं गणित मांडलं. त्यानुसार सध्याचा मानव गेली २००,००० वर्षं पृथ्वीवर निवास करत आहे, असं मानल्यास आपण आणखी किमान फक्त ५१०० वर्षं तर कमाल ७८ लक्ष वर्षं या पृथ्वीवर राहू शकू याची संभाव्यता ९५ टक्के असेल. म्हणून त्यांच्या मते, आपण लवकरात लवकर परग्रहांवर मानव वस्ती स्थापन केली पाहिजे.

वरील उदाहरणं आणि चर्चेच्या आधारे संभाव्यता संकल्पनेची व्याप्ती आणि उपयुक्तता लक्षात येते. ही संकल्पना अनेक वेळा समजण्यास आणि वापरण्यास कठीण सिद्ध होते. यासाठी विविध प्रकारची उदाहरणं आणि खेळ यांचा वापर शिक्षकांनी केल्यास विद्यार्थ्यांना त्याचं आकलन होऊ शकतं. कम्प्युटरचा वापर यासाठी फारच उपयोगी ठरतो. संख्याशास्त्राची ही मूलभूत संकल्पना अनेक क्षेत्रांत वापरली जाते. म्हणून तिचा अभ्यास फारच महत्त्वाचा आहे. एका अर्थाने मानवी जीवनातील घटनांची अनिश्चितता अशा गणिती रूपात मांडता येणं ही गणिताची एक मोठी उपलब्धताच मानली पाहिजे.

✤

३३

लायब्ररीचं गणित

+× ∑ ∫

गणिताचा वापर ग्रंथालय व्यवस्थापन तसेच ग्रंथालय व माहितीशास्त्रात अनेक प्रकारे होतो. लायब्ररीत गणित कसं वापरता येतं याची चर्चा करूया.

लायब्ररी म्हणताच पुस्तकं आणि मासिकांनी भरलेली कपाटं आणि टेबल-खुर्च्यांवर बसलेले वाचक असं दृश्य आपोआपच डोळ्यांसमोर उभं राहतं. या लायब्ररींमध्ये आलेले कम्प्युटर्स लायब्ररीचं हे रूप बदलू लागले आहेत. या लायब्ररीतील कम्प्युटर सिस्टीम ऑपरेट होण्यासाठी गणिताचा वापर केला जातो. पण गणित आणि ग्रंथालयांचा संबंध यापेक्षा गहन आहे.

स्टॅटिस्टिक्स आणि ऑपरेशन्स रिसर्च या गणिताच्या शाखांचा वापर करून लायब्ररी मॅनेजमेण्ट (ग्रंथालय व्यवस्थापन) हा विषय परिपूर्ण करता येतो. या संदर्भात प्रा. फिलीप मोर्स यांनी केलेला अभ्यास आणि सुचवलेले बदल यांची दखल घ्यायला हवी. त्यांनी मॅसेच्युएट्स इन्स्टिट्यूट ऑफ टेक्नॉलॉजी या अमेरिकेतील संस्थेच्या मोठ्या लायब्ररीचा गणिती प्रणाली वापरून अभ्यास केला आहे. त्यांचं हे कार्य अनेक शोध-लेख आणि एक पुस्तक (*Library Effectiveness,* MIT Press, १९६८) याद्वारे प्रसिद्ध झालं आहे. यासाठी त्यांना ऑपरेशन्स रिसर्च सोसायटी ऑफ अमेरिका या संस्थेने खास पुरस्कार दिला होता.

ग्रंथालय व्यवस्थापन आणि सेवा पुरवताना अनेक प्रकारचे निर्णय घ्यावे लागतात. त्यांतील काही उदाहरणं म्हणून बघूयाः

- पुस्तकांची देवाण-घेवाण करताना लागणारा वेळ वाचवणं, वाचक सदस्यांची (मेम्बर्सची) रांग कशी कमी करता येईल ?
- लायब्ररीतील कोणतं साहित्य वापरलं जाण्याची संभाव्यता (Probability) कमी झाली आहे. उदा. भौतिकशास्त्राची २० वर्षांहून जुनी झालेली पुस्तकं सहसा वापरली जात नाहीत. असे कालबाह्य साहित्य लायब्ररीच्या गोदामात ठेवता येईल.
- वाचकांची विशिष्ट विषयाबाबतच्या साहित्याची मागणी सखोलपणे पूर्ण करण्यासाठी कोणती शोधपद्धती (Search strategy) वापरावी ?
- सर्व सेवा व्यवस्थितपणे पुरवणं, तसंच वाचकांच्या गरजा अधिकाधिक प्रमाणात पूर्ण करणं शक्य होईल अशा प्रकारे ग्रंथालयाच्या उपलब्ध निधीचं वाटप करणं.
- वर्गणी भरून घेतल्या जाणाऱ्या जर्नल्सची उपयुक्तता वेळोवेळी मोजून प्रत्येक विषयातील मुख्य आणि दुय्यम जर्नल्स अशी विभागणी करणं आणि त्यानुसार जर्नल्सच्या नूतनीकरणाचा निर्णय घेणं. त्यामुळे निधीत कपात झाल्यास कोणती जर्नल्स थांबवावी याचा निर्णय घेता येतो.
- ग्रंथालयातील साहित्यावर बार कोडिंग किंवा रेडियो फ्रिक्वेन्सी आयडेण्टिफिकेशन (RFID) अशा आधुनिक, पण खर्चिक टेक्नॉलॉजीने प्रक्रिया करणं. यामुळे साहित्य सुरक्षित राखता येतं, शिवाय ती पुस्तकं कुठे ठेवली आहेत ते सहज शोधून काढता येतं.
- वाचकांना किती दिवसांसाठी पुस्तकं वाचण्यासाठी द्यावी आणि ते पुस्तक परत करण्यास उशीर झाल्यास दंड कशा प्रकारे आकारावा याचं धोरण ठरवणं.

लायब्ररीतील रोजच्या कामात असे अनेक निर्णय घ्यावे लागतात. या संदर्भात पुढील गणिती आणि ऑपेरशन्स रिसर्चमधील पद्धतींचा वापर उपयुक्त ठरल्याचं सिद्ध झालं आहेः

- Linear Programming - निधी आणि इतर संसाधन वाटपासाठी

- Queuing Theory – वाचकांची रांग आणि वेळेची बचत करण्यासाठी
- Markov Chain Models – ग्रंथसाहित्याचा वापर कितपत होतो हे तपासण्यासाठी
- Decision Theory – कोणत्याही विषयाबाबत ग्रंथालयातील संग्रहातून अचूक साहित्य शोधण्यासाठी
- Simulation – पुस्तकांच्या अधिक प्रती घेणं तसंच वाचकांच्या मागणीप्रमाणे साहित्य आरक्षित करणं आणि त्यांचा परिणाम तपासण्यासाठी

याशिवाय ग्रंथालयशास्त्राशी निगडित माहितीशास्त्रात, प्रसिद्ध झालेल्या शोधलेखांचा वापर कसा बदलत जातो याचा अभ्यास अनेक गणिती पद्धती वापरून केला जातो. यासाठी Bibliometrics किंवा Informetrics अशा उपशाखा निर्माण केल्या आहेत. वेबसाइट्सवरील माहितीचा याच प्रकारे अभ्यास करण्यासाठी Webometrics अशी नवीन उपशाखा अस्तित्वात आली आहे. त्याचप्रमाणे कुठल्याही लेखाचा संदर्भ त्याचा लेखक वगळता इतर लोक त्यांच्या लेखन कामात देतात याची नोंद घेऊन लेखांची उपयुक्ता ठरवण्यासाठी Citation Index असा मापदंड तयार करण्यासाठीही गणिताचा उपयोग केला जातो.

लायब्ररी सायन्सची मूलभूत पाच सूत्रं किंवा नियम मांडणारे जगप्रसिद्ध ग्रंथपाल डॉ. एस. आर. रंगनाथन यांचं मूळ शिक्षण गणिताचंच होतं. त्यांची पहिली नेमणूक मद्रास विद्यापीठामध्ये गणित शिकवण्यासाठी झाली होती. यामुळे त्यांच्या पाच नियम आणि इतर सर्व कार्यावर गणिती विचारसरणीचा प्रभाव जाणवतो.

कम्प्युटरच्या विकासामुळे लायब्ररी क्षेत्रात अनेक प्रकारचे बदल झाले आहेत. खुद्द लायब्ररीचं कम्प्युटरायझेशन करण्याचा आराखडा तयार करण्यासाठी आणि तो राबवण्यासाठी इण्टरप्रीटीव्ह स्ट्रक्चर मॉडेलिंग (Interpretive Structure Modelling) आणि पर्ट/सीपीएम (PERT/CPM) यांसारख्या काही विशिष्ट गणिती मॉडेल्सचा वापर करण्यात आला आहे. तसंच उपलब्ध असलेल्या विविध सॉफ्टवेअर्समधून विशिष्ट लायब्ररीसाठी सर्वात योग्य ठरेल असं सॉफ्टवेअर निवडण्यासाठी व्यापक संरचनाशास्त्र (Generic Design Science) या पद्धतीचा वापर सुचवला जातो.

याशिवाय लायब्ररीतील कपाटं, स्टाफ, वाचक, कम्प्युटर आदी वस्तू कोणत्या प्रकारे ठेवल्यास जागेचा पूर्ण आणि योग्य वापर व्हावा तसंच वाचकांना स्वतः साहित्य शोधण्यासाठी त्रास होऊ नये, वाचक वर्ग ग्रंथालयातील कर्मचाऱ्यांच्या दृष्टिक्षेपात राहतील हे ठरवण्यासाठीही सोप्या गणिताचा आणि ग्राफ थिअरीतील संकल्पनांचा वापर करता येतो. इथे विविध प्रकारे संरचना केल्यास Visibility Index, Convenience Index आदी निर्देशांकावर काय परिणाम होईल, हे तपासून योग्य रचना निवडता येते. मुख्य म्हणजे असा अभ्यास ग्रंथालयाच्या नकाशावरून करता येत असल्यामुळे सामुग्रीची हलवाहलव आराखडा मान्य केल्यावर एकदाच करावी लागते.

रंगनाथन यांच्या पाचव्या नियमानुसार लायब्ररीची वाढ होतच राहणार. ग्रंथालयीन सामुग्री, वाचकवर्ग, कम्प्युटर नेटवर्कमुळे माहिती गोळा करणं अशा अनेक बाबतींत ही वाढ असू शकते. अर्थातच ग्रंथालयांचा वाढता व्याप सांभाळणं आणि त्याचबरोबर आधुनिक आणि परिपूर्ण सेवा देण्यासाठी गणिती विश्लेषण आणि व्यावसायिक दृष्टिकोन यांचा अधिकाधिक वापर अनिवार्य होणार आहे. म्हणूनच ग्रंथालय आणि माहितीशास्त्राच्या शिक्षणात गणिती पद्धतींची ओळख आणि काही प्रमाणात प्रॅक्टिकल्स आणि प्रोजेक्ट्सचा समावेश उपयोगी ठरेल. भावी ग्रंथालयांना सोडवाव्या लागणाऱ्या ग्रंथालयीन समस्या अधिक कठीण असतील आणि त्यासाठी अशा नवीन गणिती तंत्रांचा वापर आवश्यक असेल.

गणिताची पुस्तकं आणि इतर सामुग्री विकत घेऊन जतन करणं एवढ्यापुरताच गणिताचा आणि ग्रंथालयांचा संबंध मर्यादित नाही. लायब्ररीचा कारभार सुरळीतपणे चालवण्यासाठी गणिताचा उपयोग महत्त्वाचा ठरतोय. याबाबत भरपूर साहित्य सामुग्री उपलब्ध असून ग्रंथपाल व ग्रंथालय क्षेत्रातील व्यक्तींनी तिचा अभ्यास केल्यास अनेक प्रश्नांबाबत मार्ग काढणं सोपं होईल अशी अपेक्षा आहे. अर्थातच ग्रंथपाल आणि गणित क्षेत्रात काम करणाऱ्या व्यक्तींचा संवाद आणि सहकार्य यासाठी महत्त्वाचं आहे.

✤

३४

विवादमुक्तीसाठी गणित

+× ∑ ∫

रोजच्या आयुष्यात कधी ना कधी कोणाशी ना कोणाशी वाद, भांडणं होतात. हे वाद म्हणजे मानवी जीवनाला लागलेले शाप आहेत. कारण यांचा सामना करण्यात वेळ आणि शक्ती खर्ची पडते. यामुळे विकास कामांकडे दुर्लक्ष होतं. वैयक्तिक स्पर्धा, हेव्यादाव्यापासून कुटुंब, समाज, राष्ट्र ते जागतिक पातळीवरील युद्धातही याचं पर्यावसान होऊ शकतं. संवाद, चर्चा, तडजोड, बळाचा वापर हे वाद संपवण्याचे मार्ग आहेत. गेम थिअरितील सुचवलेल्या पर्यायांद्वारे हे वाद सोडवणं शक्य आहे.

गणितामध्ये, आधुनिक काळात 'गेम थिअरि' या विषयाची रचना विवाद तर्कसंगत पद्धतीने सोडवण्यासाठी करण्यात आली. याचं मुख्य श्रेय सुप्रसिद्ध गणितज्ज्ञ जॉन व्हॉन न्यूमान (१९०३-५७) यांना दिलं जातं. त्यांनी ऑस्कर मॉर्गेस्टर्न यांच्या समवेत प्रसिद्ध केलेल्या *'Game Theory and Economic Behavior,* Princeton University Press, 1944' या पुस्तकाद्वारे या विषयाची उभारणी केली. आर्थिक व्यवहारातील वादविवाद

सोडवणं हे त्यांचं उद्दिष्ट होतं. तरीही त्याच्या पद्धती लष्करी डावपेच आखणं आणि रणनीती ठरवण्यास उपयोगी असल्यामुळे दुसऱ्या महायुद्धात उदयास आलेल्या 'ऑपरेशन्स रिसर्च' या विषयाचा एक घटक म्हणून गेम थिअरि मानली जाते.

कोणत्याही वादात किंवा स्पर्धेत किमान दोन पक्ष असतात. काही वेळा दुसरा पक्ष निसर्गही असू शकतो. प्रत्येक पक्षाकडे परिस्थितीवर किंवा प्रतिपक्षावर मात करण्यासाठी काही पर्याय असू शकतात. प्रत्येक पर्यायामुळे एका पक्षाला फायदा किंवा तोटा होऊ शकतो. अर्थातच ते प्रतिपक्ष कोणता पर्याय निवडतो यावर अवलंबून असतं. गेम थिअरि सर्व पर्यायांचे फायदे किंवा तोटे सापेक्ष अंकाने मांडते. उदाहरणार्थ, −१ हा −४ या तोट्यापेक्षा कमी असल्यामुळे −१ शी संबंधित पर्याय निवडण्यात हित आहे. गेम थिअरि या प्रकारे निर्माण करण्यात आलेल्या अंकांच्या तक्त्यावरून प्रत्येक पक्षाने कोणता पर्याय निवडल्यास त्यास अधिक फायदा होईल किंवा विरुद्ध पक्षाला कमी फायदा होईल याचं मार्गदर्शन करते. एका पक्षाला झालेला फायदा आणि दुसऱ्या पक्षाला झालेला तोटा समान असतील तर त्या स्पर्धेला Zero Sum Game म्हटलं जातं. अन्यथा Non-Zero Sum Game अशी परिस्थिती असते.[१]

गेम थिअरिच्या उपरोक्त प्राथमिक स्वरूपाला अधिक व्यापक स्तरावर नेण्यासाठी १९५० च्या दशकातील जॉन नॅश या गणितज्ज्ञाचं योगदान फार महत्त्वाचं ठरलं. (*The Beautiful Mind* हा गाजलेला चित्रपट त्यांच्या जीवनावर आधारित आहे.) त्यांनी असं सिद्ध केलं, की दोनपेक्षा अधिक पक्ष असले तरी सर्व पक्षांना सोयीस्कर अशी एक पर्याय निवड पद्धती शोधता येते. तसंच ही पद्धत न वापरणाऱ्या पक्षास नुकसान होईल. त्याला Nash Equillbrium Solution म्हणतात. अर्थातच जसे पक्ष आणि पर्याय वाढतात, तशी गेम थिअरितील आकडेमोड कठीण होते. गेम थिअरि आणि लिनिअर प्रोग्रामिंग यांच्यात घनिष्ठ संबंध असल्यामुळे लिनिअर प्रोग्रामिंगसाठी उपलब्ध असलेल्या सॉफ्टवेअर्सचा उपयोग करता येतो.

व्यवहारात मात्र काही वेळा गेम थिअरिने सुचवलेले उत्तर कमी उपयोगी ठरू शकते. याचं उत्तम उदाहरण, प्रिझनर्स डायलेमा (Prisoner's Dilemma) या नावाने प्रसिद्ध आहे. दोन व्यक्तींना बँक आवारात चोरीच्या संशयावरून पोलिसांनी पकडलं आणि झडतीमध्ये त्यांनी बाळगलेली अवैध पिस्तुलं सापडली. त्या दोघांना वेगवेगळ्या कोठडीत ठेवण्यात आलं. प्रत्येकाला असा

पर्याय दिला, की तो जर माफीचा साक्षीदार झाला आणि त्याने चोरीबाबत दुसऱ्याचं नाव घेतलं तर त्याची सुटका होईल आणि दुसऱ्याला २० वर्षांची कैद होईल. पण दोघांनी कबुली दिली, तर प्रत्येकाला दहा वर्षं कैद होईल. जर दोघांनीही बँक चोरीचा गुन्हा नाकबूल केला तर फक्त अवैध पिस्तूल बाळगल्याबद्दल दोन वर्षांची कैद होईल असा नियम सांगतो. गेम थिअरिनुसार प्रत्येक कैद्याने बँक चोरीचा गुन्हा कबूल करावा हा पर्याय सुचवला जातो. सामाजिक समस्या अनेकदा या प्रकारात मोडतात. म्हणूनच कित्येक सार्वजनिक कार्यक्रमांत निधी आणि इतर साधनांचा वापर इष्टतम (optimum) प्रमाणात होत नाही. मात्र, अशा अनिश्चित परिस्थितीमुळे बाजारात एकाधिकार स्थिती (Monopoly Situation) फार वेळ टिकून राहत नाही ही जमेची बाजू आहे.

परिस्थिती स्पर्धात्मक असो किंवा काही प्रमाणात सहकार्याची असो (Co-operative Games) पुढीलप्रमाणे वागल्यास नुकसान कमी होईल असा सल्ला गेम थिअरि देते.

१) दुसऱ्याचा हेवा करू नका.

२) ठरलेला करार मोडण्यात पुढाकार घेऊ नका.

३) जशास तसं वागा.

४) जास्त हुशारी दाखवू नका.

गेम थिअरिचा उपयोग व्यापक प्रमाणावर झाला असून नवीन प्रश्नांसाठी संशोधनही सुरू आहे. त्यांची व्याप्ती पुढील नमुन्यादाखल दिलेल्या क्षेत्रांवरून लक्षात येईल.

★ युद्ध आणि शांती अभ्यास (उद्रेक होण्याची कारणं, शांती राखण्याचे उपाय)

★ राज्यशास्त्र (मताधिकाराचा वापर, आघाडी किंवा युती सरकारची धोरणं)

★ समाजशास्त्र (लाचलुचपत आणि प्रतिबंधन)

★ मानसशास्त्र (कौटुंबिक नाती, मित्रता यांतील बदल आणि ताणतणाव)

★ उत्क्रांती जीवशास्त्र (उत्क्रांती सुरळीतपणे विकसित होण्यासाठी पर्याय)

मागील काही दशकांत गेम थिअरिचा विकास अनेक दिशांनी झाला आहे. त्यात मेटागेम (Meta Game) थिअरि हा एक उल्लेखनीय टप्पा आहे. व्हिएतनाममधील युद्धाची रणनीती तसंच युद्ध कस संपवता येईल, या उद्देशाने मेटागेम थिअरिचा विकास झाला. इथे निरनिराळे पर्याय निर्माण करून त्यांतील असंभव आणि अमान्य होतील असे पर्याय बाद करत सर्वमान्य होतील असे

पर्याय शोधणं अशी कल्पना आहे. त्यासाठी CONAN हे सॉफ्टवेअर विकसित करण्यात आलं होत. गेम थिअरिमध्ये सर्व पक्ष परिस्थितीकडे एकाच दृष्टिकोनातून बघतात असं गृहीत धरलं जातं. मात्र प्रत्यक्षात तसे नसल्यास परिस्थिती कशी हाताळावी यासाठी हायपर गेम (Hyper Game) थिअरिचा विकास करण्यात आला आहे. अलीकडच्या काळात ड्रामा थिअरि (Drama Theory) हे गेम थिअरिच नवीन रूप पुढं आलं आहे. समस्येचा एखाद्या नाटकामध्ये बदल होत जाणाऱ्या घटनाचक्राप्रमाणे अभ्यास करणं हा सदर ड्रामा थिअरिचा गाभा आहे.

गणितासाठी स्वतंत्र नोबेल पारितोषिक दिलं जात नसलं तरी पुढील अर्थशास्त्रातील योगदानासाठी दिलेली नोबेल पारितोषिके मुख्यतः गेम थिअरिचा विकास आणि उपयोग यासाठीच आहे असंच समजलं जातं.

वर्ष	विजेते
१) १९९४	– जे. नॅश, जे. हरसनायी आणि आर. सेल्टन
२) २००५	– टी. सी. शेलिंग आणि जे. ऑमन
३) २००७	– एल. हुरविझ, इ. मास्किन आणि आर. मायरसन

इण्टरनॅशनल गेम थिअरि सोसायटी (www.gametheorysociety.org) ही संस्था गेम थिअरिचा सर्वांगीण विकास आणि वापर व्हावा यासाठी कार्यरत आहे. *International Journal of Game Theory* आणि *Games and Economic Behaviour* अशी प्रतिष्ठित जर्नल्स ही संस्था प्रसिद्ध करतं.

आपल्या देशात गेम थिअरिचा वापर अनेक क्षेत्रांत करणं शक्य आहे. काही वर्षांपूर्वी तामिळनाडू, आंध्रप्रदेश, केरळ आणि कर्नाटक यांनी संयुक्त विद्युत प्रकल्पात कशा प्रकारे निधी द्यावा याचं उत्तर गेम थिअरिद्वारे काढून दाखवलं होतं.

गेम थिअरिचा वापर तंटामुक्त गाव योजना राबवण्यास कदाचित उपयुक्त ठरू शकतो.

✤

---

१) गेम थिअरिबाबत सोप्या भाषेतील पुढील पुस्तके पाहावीत :

- Osborne, M. J., *An Introduction to Game Theory,* New Delhi: Oxford University Press, 2007 (Indian Edition).
- Williams, J. D., *Complete Strategyst,* New York: Dover Publications, 1996.

३८

लेखन गणिताचं

$+ \times \sum \int$

शिकवण्याएवढंच चांगल्या पद्धतीने केलेलं लेखन गणितामध्ये रस निर्माण करण्यास आणि विकास करण्यास हातभार लावतं. विज्ञानकथांचं योगदान विज्ञान आणि तंत्रज्ञानाच्या प्रगतीत मार्गदर्शक ठरल्याचं आढळून आलंय. त्याची पोच म्हणजे सन २००७ मध्ये डोरिस लेसिंग या विज्ञानकथा लेखिकेला साहित्यामधील नोबेल पुरस्कार मिळाला. पण अशा प्रकारचं स्वतंत्र गणितकथा लेखन फारसं आढळत नाही.

गणितातील लेखनाचे तीन मुख्य भाग करण्यात येतातः

१. पाठ्यपुस्तक

२. सर्वसामान्यांसाठी साहित्य

३. शोधलेख तसंच गंभीर प्रकृतीचे ग्रंथ.

शाळा, कॉलेजमधील गणिताची पाठ्यपुस्तकं या विषयाची आवड नवीन पिढीमध्ये निर्माण करण्यास कारणीभूत ठरतात. त्यामुळे अशा पुस्तकांचं लेखन आणि मांडणी सुबक असावी आणि दर्जाही चांगला असावा. राष्ट्रीय शिक्षण

संशोधन आणि प्रशिक्षण परिषद (NCERT) नवी दिल्ली, या संस्थेने देशभरात शालेय स्तरावर गणित आणि सांख्यिकी कसं शिकवावं याबाबतीत नवीन दृष्टिकोन *New Curriculur Framework,* 2005 अहवालाद्वारे मांडला आहे.

आपल्या शिक्षणात हल्ली 'विषय शिकणं' आणि 'विषय शिकवणं' याऐवजी 'पुस्तक शिकणं' आणि 'पुस्तक शिकवणं' यावर अधिक भर देण्यात येतो. हे प्रमाण कमी व्हायला हवं. तसंच वापरात येणारी पुस्तकं उत्तम प्रतीची असायला हवी. केवळ परीक्षेची तयारी करून घेणारी गणिताची पुस्तकं गणिताच्या अनेक उपयुक्त पैलूंबद्दल काहीच माहिती देत नाहीत. आपलं शिकणं फक्त या प्रकारच्या पुस्तकांपुरतंच मर्यादित ठेवणारे विद्यार्थी गणिताचा सर्वांगीण आनंद घेऊ शकत नाहीत. म्हणूनच गणिताची काही पुस्तकंही विषयानुसार शालेय स्तरावर विद्यार्थ्यांना वाचण्यास प्रवृत्त करणारी असावीत. उदाहरणार्थ, बीजगणिताचे पुस्तक संपूर्ण बीजगणिताबाबत असाव न की केवळ मर्यादित पाठ्यक्रमासाठी.

पाठ्यपुस्तकात विषयानुरूप अधिकाधिक योग्य आणि सूचक चित्रं, आलेख आणि मानचित्रं असल्यास गणिती संकल्पना समजण्यास विद्यार्थ्यांना मदत होते. तसंच गणिती कल्पना आणि पद्धतींशी निगडित आख्यायिका, गणितज्ज्ञाचं संक्षिप्त चरित्र आणि आजच्या व्यवहारात गणिताचा वापर याबाबतचा मजकूरही अशा पुस्तकांत असावा. भास्कराचार्य यांनी अनेक शतकांपूर्वी लिहिलेलं *'लीलावती'* हे गणिताचं पुस्तक आजही मार्गदर्शक ठरू शकतं. अशा प्रकारे सरावासाठी प्रश्न आणि उदाहरण याशिवाय स्वतंत्र विचार करायला लावणारं आणि काही गणिती प्रकल्प हाती घेण्यास उद्युक्त करणारं साहित्यही पाठ्यपुस्तकात समाविष्ट केल्यास उपयोगी ठरतं. आज अनेक इंजिनिअरिंगचे विद्यार्थीही प्रगत गणितातील विषय शिकण्याचं प्रयोजन काय याबाबत संभ्रमात असतात. मुळात पुस्तकं आणि शिक्षक संबंधित विषयांची तसंच प्रत्यक्षात संरचना (Design) करण्याच्या कार्यपद्धतीशी सांगड घालताना सहसा आढळत नाहीत, हे त्याचं कारण आहे.

गणिताचा इतिहास तसंच नवीन घडामोडींची ओळख सामान्य माणसापर्यंत पोहोचण्यासाठी पुस्तकं, मासिकं आणि वर्तमानपत्रांतून लेख लिहिणं आणि आता इण्टरनेटचाही यासाठी उपयोग होऊ शकतो. पण त्याचं प्रमाण फार थोडं आहे. याला मुख्य कारण म्हणजे सोप्या, सरळ भाषेत आणि त्याचबरोबर मनोरंजनात्मक पद्धतीने गणिताबद्दल लेखन करणाऱ्या लेखकांची कमतरता.

अवघड तांत्रिक शब्द आणि ग्रीक भाषेतील अगम्य अक्षरं तसंच चिन्हं टाळून गणिती लेखन करणं हे एक मोठंच आव्हान आहे.

गणिती संशोधक आणि प्राध्यापक याबाबत काहीसे उदासीन असल्यामुळे काही वेळा अशा लेखनामध्ये चुका होतात. गणित हे फक्त गणितापुरतं मर्यादित आहे, हा दृष्टिकोन आगामी काळात बदलणं गरजेचं आहे. मार्टीन गार्डनर (स्वतः गणितज्ज्ञ नसूनही) यांनी *Scientific American* या मासिकातून दोन दशकाहून अधिक काळ चालवलेला गणिताबाबतचा स्तंभ ही एक अनुकरणीय बाब आहे. आपल्या देशात याबाबत एकूणच अनास्था आढळते. प्रादेशिक पातळीवरही सर्वसामान्यांसाठी गणिताचं लेखनसाहित्य निर्माण होताना दिसत नाही. मराठी विज्ञान परिषदेच्या मासिक पत्रिकेतही गणिताबाबत सातत्याने लेख प्रसिद्ध होत नाहीत. किंबहुना, त्या प्रकारचं साहित्य मुळातच जास्त प्रमाणात प्राप्त होत नाही.[१]

गणितातील संशोधनाधारित लेखन एका विशिष्ट शैलीत मांडण्याची पद्धत आहे. तिचं मुख्य वैशिष्ट्य म्हणजे संक्षिप्तता आणि मुद्देसूदपणा (brevity and terse) एका अर्थाने गणिती शोधलेख कवितेसारखे असतात. कमी शब्दांत मोठा आशय सांगणं. म्हणूनच गणितातील चांगले आणि नवीन दिशा देणारे लेखसुद्धा छोटेखानी असल्याचं आढळतं. उदाहरणार्थ, भारतातील प्रसिद्ध स्टॅटिस्टिशियन प्रा. विद्याधर गोडांबे यांचा "A Unified Theory of Sampling from Finite Population", *Journal of Royal Statistical Society,* B 17, 1955, pp. 269-278 हा लेख. या फक्त दहा पानी लेखाने सर्वेक्षण नमुना चाचणीद्वारे अनुमान (inference) काढण्यामागील मूलतत्त्वांची तपासणी झाली आणि हा लेख त्या विषयातील सर्वाधिक संदर्भ मिळवणाऱ्या लेखात गणला जातो हे विशेष.

त्याचप्रमाणे असा संशोधनात्मक लेख जो कोणत्या मार्गाने जाऊ नका, असं सांगतो त्याचं गणितात अनन्यसाधारण महत्त्व आहे. उदाहरणार्थ, प्रा. आर. जी. जेरोस्लोव्ह यांचा "There cannot be any Algorithm for Integer Programming with Qudratic Constraints", *Operations Research,* Vol. 21, No. 1, 1973, pp 221-224 हा लेख. चार पानाहून कमी लांबी असलेल्या या लेखाने त्या प्रकारच्या प्रश्नासाठी वेगळ्या प्रकारे विचार करावा लागेल हे सिद्ध झालं. शोध लेखांची विविध वैशिष्ट्यं दर्शवणारा आणखी एक लेख आहे, प्रा. जी. टी. डंकन लिखित "Optimal Diagnostic

Questionnaires", *Operations Research,* Vol. 23, No. 1, 1975, pp. 22-32'. या अकरा पानी लेखात तीन चित्रं आणि तीन तक्ते तसंच संदर्भ आहेत. मुख्य म्हणजे त्यात Dynamic Programmming, Graph Theory Number Theory आणि Information Theory अशा एकापेक्षा जास्त गणिती शाखांची सांगड घालून उपयोगितेच्या दृष्टीने उपयुक्त निष्कर्ष दिले आहेत. तसंच जी. एच. हार्डी आणि एस. रामानुजन यांच्या १९१८ मध्ये प्रसिद्ध झालेल्या लेखाशी संबंध जोडला आहे. गणितात असं शोधलेखन आदर्शवत मानलं जातं.

गणित किंवा गणिताधारित एखाद्या विषयाचा संपूर्ण आढावा घेऊन सद्यस्थिती काय आहे, याविषयीचे लेख किंवा पुस्तकांचा अभ्यासकांना अधिक उपयोग होतो. मात्र असे साहित्य सर्वसामान्यांसाठी तयार करणं कठीण असतं यात शंका नाही. यासंदर्भात पी. एल. बर्नस्टाइन यांचं *'Against the Gods - The Remarkable Story of Risk,* John Wiley & Sons, 1988' हे पुस्तक अपवाद ठरावं. वित्तीय उलाढालीत पोर्टफोलिओ मॅनेजमेण्ट या अतिशय क्लिष्ट गणिती पद्धतीत योगदान दिलेल्या बर्नस्टाइन यांचं हे ३९२ पानांचं पुस्तक कोणालाही समजेल अशा भाषेत असून त्यात एकही गणिती सूत्र, समीकरण किंवा चिन्ह वापरलेलं नाही. अशा पुस्तकांची निर्मिती गणितातील इतर शाखांसाठी झाली तर समाजाला उपयोगी आणि स्वागतपर ठरेल.

---

१) या संदर्भात मराठी विज्ञान परिषदेचे कार्यवाह श्री. अ. पां. देशपांडे यांनी तत्परतेने कळवले की पृष्ठांची मर्यादा व विज्ञानातील अनेक शाखा लक्षात घेता गणिताबाबत अधिक प्रमाणात मजकूर मासिक पत्रिकेत देणे शक्य होत नाही याबद्दल खंत वाटते. मात्र मार्च २००६ ते फेब्रुवारी २००८ या २३ महिन्यांत १७ वेळा गणिताबाबत विविध प्रकारची माहिती देण्यात आली होती.

हा प्रयत्न अर्थातच स्तुत्य व आशादायक आहे, पण गरज आहे ती सकस दीर्घ लेखमाला चालवण्याची.

✤

३६

इतिहास गणिताचा

+× ∑ ∫

गणिताचा इतिहास भाषेइतकाच प्राचीन आहे. उदाहरणार्थ, एकवचन आणि बहुवचन तसंच क्रियापदातील बदल हा गणितातील एक, दोन आणि अनेक अशा संख्यांशी निगडित आहे. पण, गणिताचा इतिहास पाठ्यक्रमात समाविष्ट नाही. याचं कारण म्हणजे गणिती संकल्पना शिकवणं आणि प्रक्रियांचा सराव करून घेणं याला प्राधान्य देण्यात आलं. विद्यार्थ्यांना गणिती कल्पना आणि पद्धती समजावताना त्यांची सांगड ऐतिहासिक घटनांशी आणि गणितज्ज्ञांची माहिती आणि कामाशी घातल्यास विद्यार्थ्यांना त्याचा फायदा होईल, असा मतप्रवाह आता पुढे येतोय.

गणिताच्या इतिहासाबाबत विपुल साहित्य उपलब्ध आहे आणि आजही निर्माण होत आहे. पण, गणिताच्या इतिहासकारांमध्येही काही मतभेद आहेत. उदाहरणार्थ, युक्लिड होता की नाही याबाबत हल्ली बरीच चर्चा होते.

असे वाद टाळून गणिताचा आधुनिक युगापर्यंतचा इतिहास थोडक्यात मांडण्याचा प्रयत्न इथे केला आहे.

आफ्रिकेतील एका उत्खननात ३७ हजार वर्षं जुन्या काही वस्तू सापडल्या आहेत. ज्यांचा उपयोग कदाचित गणती करण्यासाठी केला जात असावा असा अंदाज आहे. इ. स. पूर्व ५००० वर्षं या कालखंडात लेखनकला विकसित झाली आणि त्याचबरोबर गणित हा एक स्वतंत्र विषय म्हणून उदयास आला असं आढळतं. टिग्रीस आणि युफ्रेटस या नद्यांमध्ये असलेला मेसोपोटामिया (आताचा इराक), तसंच नाइल नदीच्या खोऱ्यातील इजिप्तमध्ये याबाबतचे शिलालेख आणि पायपारस प्रकाश पाडतात.

शेतामध्ये किती पीक आलं, त्याप्रमाणे किती सारा किंवा कर वसूल करायचा या प्रकारच्या शासकीय महसूल कामासाठी गणिताचा वापर सुरू झाला. त्याचं शिक्षण देण्यासाठी शासकीय शाळा सुरू करण्यात आल्या. पण, इथे फक्त सनदी नोकरवर्गालाच प्रवेश होता. कदाचित भारत आणि चीनमध्येही याच काळात अशी सुरुवात झाली असावी. याबाबत ठोस पुरावा मिळालेला नाही. गणनपद्धती किचकट आणि प्राथमिक स्वरूपाची होती.

इ. स. पूर्व १९०० ते १६०० या काळात मेसोपोटामियामध्ये गणिताचा उपयोग सरकारी कामाव्यतिरिक्त वाढला. साठच्या घरात संख्या मोजायची पद्धत तेव्हा विकसित झाली. आपण आजही एक तास म्हणजे साठ मिनिटं, एक मिनिट म्हणजे साठ सेकंद त्याच पद्धतीने वापरत आहोत. त्या काळात सर्वसामान्यपणे वापरता येईल अशा गणितीपद्धती विकसित करण्यावर भर होता. त्यानंतर मात्र इ. स. पूर्व ३०० वर्षांपर्यंत गणिताची वाढ त्या भागात कुंठित झालेली दिसते.

कागदाचा शोध लागेपर्यंत चीनमध्ये बाबूंच्या सालापासून तयार करण्यात येणाऱ्या पत्रावर लिहिण्याची पद्धत होती. त्या भोजपत्राचं आयुष्य फार नसल्यामुळे चीनमधील पूर्वाचीन गणिताबाबत फारशी माहिती उपलब्ध नाही. सर्वात महत्त्वाचा आणि विश्वसनीय असा चिनी जुन्या गणिताचा दाखला म्हणजे *The Nine Chapters on the Mathematical Art* हे लीऊ ह्यू यांनी इ. स. २६३ मध्ये संकलित केलेलं पुस्तक. या पुस्तकात भूमिती, बीजगणितातील काही सूत्रं आहेत. काही कोडी आणि कूटप्रश्नही आहेत. मात्र, त्यानंतर चीनमधील गणिताच्या विकासाबद्दल फारशी माहिती नाही. (या संदर्भात पहा : Kangshen, S., Crossley, J. N. and Lun, A. W-C.,

The Nine Chapters on the Mathematical Art : Companion and Commentary, Oxford : Oxford University Press, 1999.)

भारतामधील गणिताबाबतही त्या काळातील ठोस माहिती नाही. वेदांची रचना इ. स. पूर्व ६०० पर्यंत पूर्ण झालेली दिसते. त्यात गणितीकल्पना आणि रिती विखुरलेल्या आढळतात. पायथागोरस सिद्धान्त, आकृत्यांचं घनफळ आणि क्षेत्रफळ कसं काढावं याची सखोल चर्चाही वेद साहित्यात आढळते.

गणिताला नवीन दिशा ग्रीक साम्राज्यातील इ. स. पूर्व ६०० ते इ.स. ४०० या सहस्रकात झालेल्या विकासामुळे मिळाली. तर्कशुद्ध विचार करणं आणि प्रमेय सिद्ध करणं हा गणित विकासाचा पाया म्हणून त्या काळात पुढे आला आणि आजही तो प्रचलित आहे. ग्रीक भाषा त्या काळात मोठ्या प्रमाणात प्रचलित असल्यामुळे ग्रीसबाहेरील देशातील गणितज्ज्ञांचं काम ग्रीक भाषेतच लिहिलं गेलं. म्हणूनच ग्रीक गणिताचा आवाका आणि प्रभाव फार मोठ्या प्रमाणावर पडला. इजिप्तमधील अलेक्झाण्ड्रिया शहरातील युक्लिड आणि सिरेक्यूज या इटलीतील सिसली भागातील आर्किमिडीज या गणितज्ज्ञांचं योगदान ग्रीक गणितात मोडलं जातं.

ग्रीक गणिताचा मुख्य रोख भूमितीवर होता. त्याची सुरुवात थेल्स (इ. स. पूर्व ६००) आणि विकास पायथागोरस (इ. स. पूर्व ५४०) यांनी केला. पायथागोरसने एक पंथ स्थापन केला होता. प्रत्येक अंकाबाबत त्याची विशिष्ट धारणा होती. प्लेटो (इ. स. पूर्व ३८०) हा गणितज्ज्ञ नसला तरी गणितासाठी तर्कशास्त्र निर्माण करण्यात त्याचा मोठा हात होता. 'ज्यांना भूमितीचं ज्ञान नाही त्यांनी आत पाऊल टाकू नये,' असं त्याच्या अकादमीच्या दारावर लिहिलं होतं, असं म्हणतात. त्याचा वारसा ॲरिस्टॉटलने (इ. स. पूर्व ३४०) चालवून गणित आणि भौतिकशास्त्रात महत्त्वाची भर घातली.

त्यानंतर युक्लिडने (इ.स. पूर्व ३००) संपूर्ण भूमिती काही स्वयंपूर्ण गृहितकं मांडून तयार केली. *Elements* हे त्याचं पुस्तक आजही वापरलं जातं. अपोलोनिअसने (इ.स. पूर्व २२५) आणि त्याच सुमारास आर्किमिडीजने विविध प्रकारच्या आकृत्यांचं क्षेत्रफळ आणि घनफळ काढण्याची सूत्रं विकसित केली. आर्किमिडीजने गणिताचा वापर भौतिकशास्त्र तसंच अस्त्रं निर्माण करण्यासाठीही केला. हा अपवाद वगळता गणिताचा विकास फक्त गणितासाठी अशीच भावना रुजली गेली होती. टोलमी (इ.स. १५०) याने

त्रिकोणमिती, डायफण्टुस (इ.स. २५०) याने अंकगणित आणि समीकरणं आणि पापुसने (इ.स. ३००) अनुपाताचा विकास या प्रकारे गणिताला पुढे नेण्यास हातभार लावला. त्या पुढील काळात ग्रीक गणितात काही उल्लेखनीय भर पडली नाही. रोमन साम्राज्याचा अंत आणि यवनी आक्रमणांमुळे पश्चिम युरोप, उत्तर आफ्रिका आणि मध्यपूर्व आशिया अशांत राहिलं. गणिताचा उपयोग फक्त व्यवहारासाठी मर्यादित राहिला.

भारतात मात्र इ.स. ५०० मध्ये आर्यभट्ट, इ.स. ६०० मध्ये ब्रह्मगुप्त आणि भास्कर आणि इ.स. ११०० मध्ये भास्कराचार्य यांनी दशमान पद्धती, ऋण अंक, बीजगणित, त्रिकोणमिती आदी विषयांचा विकास केला. इ. स. ७५० मध्ये इस्लामिक साम्राज्य भारताच्या पश्चिम वेशीपासून स्पेनपर्यंत पसरले. त्यामुळे अरेबिक भाषा प्रचलित होऊ लागल्याने ग्रीक आणि भारतीय ग्रंथांचे अरेबिकमध्ये अनुवाद झाले. त्यात अल-खारझमी याने *'अल-जाब्र वाल-मुकाबला'* हे उपलब्ध गणिती माहिती एकत्रित केलेले पुस्तक रचले. त्याचे लॅटीन व मग इंग्रजी भाषेत रूपांतर करताना अलजेब्रा असे नाव बीजगणिताला पडले. उमर खय्याम या कवीने बीजगणित आणि भूमितीच्या काही पद्धतींमध्ये भर घातली. आधुनिक अंकपद्धती जगभर हिंदू-अरेबिक प्रणाली म्हणून मानली जाते आणि सुटसुटीतपणामुळे वापरली जाते.

दहाव्या शतकापासून ते १५ व्या शतकापर्यंत मध्यकालीन युगात युरोपमध्ये गणिताचं शिक्षण चर्चच्या शाळेतून दिलं जाऊ लागलं आणि भारतीय आणि अरेबिक गणिती पद्धती तसंच ग्रीक गणिताचे सिद्धांत यांचा अभ्यास मोठ्या प्रमाणावर होऊ लागला. इ.स. ११०० मध्ये युरोपमध्ये विद्यापीठांची स्थापना झाली व गणिताचा अभ्यास राजाश्रयाच्या बाहेर होण्यास सुरवात झाली. यांत्रिक छपाईच्या शोधामुळे गणिताची पुस्तके मोठ्या प्रमाणावर उपलब्ध होऊ लागली व त्यामुळे गणिताचा विकास गतिमान झाला.

आता उपलब्ध असलेल्या गणितातील ९५ टक्के भाग सन १९०० नंतर निर्माण करण्यात आला आहे याची नोंद घेतली पाहिजे. मात्र, यात महिला गणितज्ज्ञांना योगदानास नगण्य संधी दिली गेली हे कटु सत्य विसरता कामा नये. आज कम्प्युटरमुळे गणिताच्या विकासासाठी नवीन दालन खुलं होत आहे. गणिताच्या इतिहासापासून बरंच शिकण्यासारखं आहे.

✤

३७

प्रवासः अंक आणि गणिती चिन्हांचा

+ × ∑ ∫

आकडेमोड आणि गणिती-प्रक्रियांसाठी जे अंक, संकेत आणि चिन्हं आपण वापरतो, ती चिन्हं हजारो वर्षांच्या गणिती विकासातून प्राप्त झाली आहेत. पूर्वीच्या काळी गणित शिकणं आणि शिकवणं कष्टदायक आणि वेळ घेणारं होतं. या प्रवासातील काही महत्त्वाचे टप्पे...

प्राचीन इजिप्तमधील चित्रलिपीतील अंक (hieroglyphic numerals):

इ.स. पूर्व ३००० ते १००० वर्षांपर्यंत इजिप्तमध्ये पुढील चित्रांद्वारे संख्या मोजल्या जात असत :

𓏺 (उभी दांडी) म्हणजे १

𓎆 (टाचेचं हाड किंवा खोट) म्हणजे १०

𓍢 (गुंडाळलेला दोरखंड) म्हणजे १००

𓆼 (कमळाचं फूल) म्हणजे १०००

𓂭 (दिशादर्शक बोट) म्हणजे १०,०००

𓆐 (अगदी लहान बेडूक) म्हणजे १,००,०००

𓁨 (आश्चर्यचकित मानव) म्हणजे १०,००,०००

उदाहरणार्थ, ११३ ही संख्या त्या वेळी ९∩III किंवा II∩I९ अशा विविध प्रकाराने मांडली जात असे.

मेसोपोटामियातील प्रणाली:

इथे षष्ठमान (60 as base) पद्धती वापरली जात असे आणि संख्या फक्त दोन संज्ञाद्वारे तयार केल्या जात. त्याप्रमाणे ∇ म्हणजे १ आणि ◁ म्हणजे १० असा अर्थ होता. त्यांचा वापर पुढीलप्रमाणे होत असे :◁∇∇ म्हणजे (१०+१+१) = १२. तर ◁∇ ∇∇∇ = (१०+१)×६०+(१+१+१) = ६६३. चित्रांच्या संज्ञांच्या समूहातील अंतरावरून प्रक्रिया ठरवली जात असे.

रोमन अंकप्रणाली:

या प्रणालीत (लॅटीन) भाषेतील अक्षरांचा समावेश पुढीलप्रमाणे होता :

I म्हणजे १

V म्हणजे ५

X म्हणजे १०

L म्हणजे ५०

C म्हणजे १००

D म्हणजे ५००

M म्हणजे १०००

मोठी संख्या लिहिताना दहाच्या घरात असलेल्या अक्षराला फक्त त्याच्यापुढील दोन मोठ्या संख्या दर्शवणाऱ्या अक्षरांच्या मागे लावून वजाबाकी करण्यास मुभा होती (subtraction rule). I केवळ V आणि X आधी, X फक्त L आणि C आधी आणि C फक्त D आणि M आधी वापरायचे. पुढील उदाहरणावरून ही पद्धत लक्षात येईलः

CLXXI म्हणजे १०० + ५० + १० + १० + १ = १७१

MCMXCIV म्हणजे १००० + (१००० − १००) + (१००−१०) + (५−१) = १९९४

वरील सर्व पद्धतींद्वारे संख्यांचे गुणाकार, भागाकार आणि अंकगणितातील इतर प्रक्रिया पार पाडणं किती कठीण आहे हे लक्षात येतं. यावर तोडगा म्हणजे इ. स. ६०० मध्ये भारतात निर्माण झालेली दशमान पद्धती. अरब मार्गे ही पद्धती युरोप आणि नंतर जगभर हिंदू-अरेबिक संख्याप्रणाली म्हणून

प्रसिद्ध आणि मान्य झाली. महावीर (इ.स. ८५०) आणि भास्कराचार्य (इ.स. ११००) यांनी त्यात '०' ला अंकाचा दर्जा देऊन भर घातली. वापरण्यास सोपी आणि सुटसुटीत अशी ही अंकप्रणाली गणिताच्या विकासासाठी वरदान ठरली. शून्य ते नऊ म्हणजे एकूण दहा अंकांचा संबंध हाताच्या दहा बोटांशी जोडता येऊ शकल्यामुळे त्यांना लॅटीन भाषेतील digitus म्हणजे बोट आणि नंतर इंग्रजीमध्ये digits हे संबोधन मिळालं. इ. स. पूर्व ४००० ते इ.स. १२०० पर्यंत म्हणजे सुमारे पाच हजार वर्षांचा कालावधी सर्वमान्य गणनपद्धती प्रचलित होण्यास लागला.

गणितामध्ये अपूर्णांक:

इजिप्तमध्ये अपूर्णांक हा अंकावर टिंब किंवा लहान वर्तुळ काढून दर्शवला जाई, अशी नोंद आहे. उदाहरणार्थ, ∩ = १० दहा तर  म्हणजे एक दशांश आणि  म्हणजे एक बारामांश अशी गणना केली जात असे. अपूर्णांकाच्या बेरीज, वजाबाकी आदी प्रक्रियेसाठी अपूर्णांकाला असं विभागलं जाई, की त्यात वरील अंक (numerator) नेहमी एक असे. उदा., आजच्या ३/५ या संख्येला १/२ + १/१० या प्रकारे विचारात घेतलं जात असे.

मात्र अपूर्णांकावर अंकगणितातील बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार करायच्या पद्धती चीनमध्ये इ. स. पूर्व १०० वर्षं या काळात विकसित झाल्या होत्या. त्यांचं वर्णन *The Nine Chapters on the Mathematical Art* या लीऊ ह्यू याने इ.स. २६३ मध्ये प्रसिद्ध केलेल्या पुस्तकात आहे. विशेष म्हणजे आजही आपण हाताने आकडेमोड करताना त्याच पद्धतींचा वापर करत आहोत.

टक्केवारी नमूद करण्यासाठी 'प्रति शंभर किंवा शेकडा' (per १००) ही पद्धत सन १४२५ मध्ये सुरू झाली आणि सन १६५० नंतर % या चिन्हाद्वारे दर्शवली जाऊ लागली आणि आजही आपण तिचा उपयोग करतो.

गणिती सूत्रं आणि समीकरणांची मांडणी:

गणिती प्रश्नाला शक्यतो शब्दांत आणि वाक्यात मांडण्याची पद्धत सर्व ठिकाणी अनेक शतकं सुरू होती. प्रश्नाला गणिती सूत्र किंवा समीकरण या सरळ रूपात लिहिण्याची सुरुवात आधुनिक काळात झाली. ती स्थित्यंतरे ४+६−३=७ या आजच्या समीकरणाची मांडणी कशी बदलत गेली ते पुढील उदाहरणावरून बघूया,

१४७० : 4 et 6 lg 3 — 7 (जर्मनी)

१४८९ : 4 + 6 - 3 des ist 7 (जर्मनी)

१४९४ : 4 $\bar{p}$ 6 $\bar{m}$ 3 — 7 (इटली आणि युरोप)

१५५७ : 4 —+— 6 —— 3 ═ 7 (इंग्लंड)

१६२९ : (4 + 6) – 3 किंवा (4 + 6) ÷ 3 = 7 (फ्रान्स)

१६३१ : : 4 + 6 : – 3 = 7 (इंग्लंड)

१६३७ : 4 + 6 – – 3 ∝ 7 (फ्रान्स व हॉलण्ड)

इ. स. १७०० पासून लायबनित्झ, बरनॉली बंधू आणि ऑयलर या गणितज्ज्ञांनी सर्व चिन्हांना परिमाणता दिली आणि आजपर्यंत त्यांचा वापर होत आहे. काही प्रक्रियांना पर्यायी पद्धती आहेत, जसे की,

गुणाकार : २×(३+५), २(३+५), २*(३+५) (कम्प्युटरसाठी)

भागाकार : ४÷५, ४/५, ४:५

वर्गमुळासाठी √ व क$^{१/३}$ अशी चिन्हे देकार्त यांनी १६३७ मध्ये प्रचलित केली. तसेच समीकरणातील अचल (constants) ही इंग्रजी भाषेतील सुरुवातीच्या अक्षरांनी, तर चल (variables) ही त्या भाषेतील शेवटच्या अक्षरांनी मांडायची पद्धत ऑयलर याने प्रतिपादित केली. उदा. : *ax + by + cz = 0* या समीकरणात a, b आणि c हे अचल आहेत, तर x, y आणि z या चल संख्या मानल्या जातात.

१९४० नंतर झालेला कम्प्युटरचा उदय आणि विकास यामुळे परत आपल्या संपूर्ण अंकप्रणाली आणि चिन्हांबद्दल विचार करण्यास भाग पाडलं. याला कारण म्हणजे कम्प्युटर तत्त्वतः शून्य आणि एक या दोन अंकांचा आधार घेऊन प्रक्रिया करतो. साहजिकच भाषेतील मूळाक्षरं आणि गणितातील अंक आणि चिन्हे यांना या द्विमान पद्धतीत बदलणं आवश्यक ठरतं. यासाठी Amercian Standard Code for Information Interchange (ASCII) ही एक प्रणाली सर्वमान्य करण्यात आली. त्यामुळे कम्प्युटरचा विकास आणि वापर करण्यासाठी एक प्रमाण (Standard) उपलब्ध झालं. या दीर्घ प्रवासावरून एक गोष्ट लक्षात येते, की कोणत्याही विषयाच्या प्रगतीसाठी त्याची भाषा, संकेत आणि संज्ञा अशा मूलभूत बाबी लवकरात लवकर प्रमाणबद्ध करणं महत्त्वाचं ठरतं. याचं उत्तम उदाहरण म्हणजे फ्रेंच वैज्ञानिक ए. एल. लवायझिये (१७४३-१७९४) यांनी आधुनिक रसायनशास्त्राची तर्कशुद्धपणे पायाभरणी केलेलं कार्य. ऑयलर याने गणितासाठी असंच काम केलं.

३८

कथा स्टॅटिस्टिक्सची

+× ∑ ∫

अंक आणि संख्या यांच्या उगमाबरोबरच संख्याशास्त्र किंवा सांख्यिकीची वाटचाल सुरू झाली. राज्यशासन सुरळीतपणे चालवण्यासाठी प्राचीन काळी विविध प्रकारची आकडेवारी गोळा करून त्याआधारे निर्णय घेतले जात. स्टॅटिस्टिक्स या इंग्रजी शब्दाचा मूळ अर्थ राज्यकारभाराचं शास्त्र असा आहे. हा शब्द इंग्रजी भाषेत दोन प्रकारे वापरला जातो. जेव्हा एकवचनी म्हणून तो वापरला जातो, तेव्हा सांख्यिकी हा विषय अपेक्षित असतो. जेव्हा अनेकवचन म्हणून वापरला जातो, तेव्हा आकडेवारी असा अर्थ असतो.

महाभारत, कौटिल्याचं *अर्थशास्त्र*, अकबराचा मंत्री अबुल फझल लिखित *'एने-अकबरी'* अशा प्रकारच्या सर्व ग्रंथ आणि सरकारी बखरीत तत्कालीन साधनसंपत्ती, उद्योगप्रकार, शेती उत्पन्न, लष्करी खर्च आणि सामान्य जनतेची परिस्थिती याबद्दल प्रकाश टाकणारी आकडेवारी आढळते.

मात्र त्यात सांख्यिकी आलेख किंवा चित्रांचा अभाव आहे. अनेक साम्राज्यांचा ऱ्हास कसा होत गेला हे या प्रकारच्या आकडेवारीच्या विश्लेषणावरून समजू शकतं. सांख्यिकीचा उपयोग माहिती वर्णन करणं यापलीकडे फारसा केला गेला नाही. त्यामुळे या विषयाची वाढ खुंटली.

आकडेवारी गोळा करून तिला गणिती बैठक देऊन संख्याशास्त्राचं रूप देणं हे औद्योगिक क्रांतीने सुरुवात झालेल्या युरोपमधील सर्व क्षेत्रांत लक्षणीय बदल घडवण्यापर्यंत शक्य झालं नाही. या प्रक्रियेला गती मिळण्यास कारणीभूत ठरलं ते संभाव्यतेचं (प्रॉबॅबिलिटी) गणिती कल्पनास्वरूप. पुढील घडामोडीचं अनुमान शास्त्रीय पद्धतीने काढता येणं त्यामुळे शक्य झालं आणि त्यामुळे संख्याशास्त्राला परत मान्यता मिळाली.

सन १६५४ मध्ये जुगाराचा डाव पूर्ण न झाल्यास त्या वेळची प्रतिस्पर्ध्यांची हार-जीत परिस्थितीवरून अंतिम पैसे वाटप कसे करायचे हा प्रश्न (Problem of Points) प्रसिद्ध फ्रेंच गणितज्ज्ञ ब्लेस पास्कल यांना विचारण्यात आला. त्यांनी यासाठी एक गणितीपद्धती विकसित केली. यांच्या पद्धतीतील घटना घडण्याची समान संभाव्यता मानणं ही संकल्पना लवकरच रूढ झाली. त्यांच्या पद्धतीचा वापर अनेक जुगार आणि खेळांचं पृथःकरण यासाठी युरोपमध्ये वाढीस लागला. मात्र, ही कल्पना गिरोलामो कार्डनो (१५०१-१५७६) या इटालियन गणितज्ज्ञाने १०० वर्षं आधीच मांडली होती. तसेच त्याने Law of Large Numbers ही सांख्यिकी संकल्पना मांडली होती.

सन १६५७ मध्ये डच वैज्ञानिक क्रिश्चन हायजेन्स याने *On Reasoning in a Dice Game* या पुस्तकात पास्कल आणि फर्मा यांच्या संभाव्यता कल्पनांना एकत्रित आणलं आणि त्यात अपेक्षित मूल्य या सांख्यिकी संकल्पनेची भर घातली. सन १६९३ मध्ये इंग्लिश खगोलशास्त्रज्ञ एडमण्ड हॅले यांनी जन्म-मृत्यू दरांची लंडन, पॅरीस आणि पोलण्डमधील आकडेवारीवर संभाव्यता सिद्धांत याचा वापर करून प्रत्येक वयोगटातील व्यक्ती किती वर्षं जगू शकते याची संभाव्यता दर्शवणारे तक्ते तयार केले. त्यामुळे आयुर्विमा विज्ञान (ॲक्च्युरियल सायन्स) विषयाची सुरुवात झाली.

सांख्यिकी आणि संभाव्यता यांची सांगड घालणारं पहिलं पुस्तक जेकब बर्नोली यांनी १७१३ मध्ये *Ars conjectandi* या शीर्षकाखाली प्रसिद्ध केलं. त्या आणि नंतरच्या सर्व सांख्यिकी विषयांतील शोधांना व्यवस्थितपणे गणितात मांडण्याचं काम प्रसिद्ध फ्रेंच गणितज्ज्ञ पिएरे सायमन लाप्लास याने

१८१२ मध्ये प्रसिद्ध केलेल्या *Analytical Theory of Probabilities* या पुस्तकाद्वारे केलं.

सामाजिक विज्ञानात सांख्यिकीचा उपयोग वाढवण्यास बेल्जियन संख्याशास्त्रज्ञ लँवर्ट क्युलेट यांच्या १८३५ मध्ये Social Physics या विषयाशी संबंधित पुस्तकाने केलं. मात्र, त्यांनी सांख्यिकीदृष्ट्या मांडलेली सरासरी माणूस (द ॲव्हरेज मॅन) ही कल्पना वादात अडकली. त्यामुळे मानसशास्त्र वगळता इतर सामाजिक शास्त्रांनी सांख्यिकीचा वापर २० व्या शतकापर्यंत टाळला.

सन १८६० मध्ये सर फ्रान्सिस गाल्टन यांनी मानवीय आणि एकूण आनुवंशिकता याचा अभ्यास सांख्यिकीचा आधार घेऊन सुरू केला. त्या कामात रीग्रेशन आणि कोरिलेशन या सांख्यिकीतील दोन महत्त्वाच्या संकल्पना त्यांनी मांडल्या. फ्रेंच गणितज्ज्ञ लिजेण्डर यांनी १८०५ मध्ये प्रथम मांडलेल्या Method of Least Squares या पद्धतीला यूल यानी योग्य ते रूप दिलं आणि त्याद्वारे रीग्रेशन ॲनालिसिस या महत्त्वाच्या सांख्यिकी पद्धतीला बळकटी आणली.

२०व्या शतकाच्या सुरुवातीस सांख्यिकीच्या अनेक उपशाखांच्या निर्मिती आणि उपयुक्ततेबाबत मोलाचं योगदान रोनाल्ड फिशर (१८९०-१९६२) यांचं आहे. वेगवेगळ्या क्षेत्रांतील प्रश्नांची उत्तरं सांख्यिकीद्वारे काढता येतात हे विविध लोकांना दाखवून संख्याशास्त्राला महत्त्वाचा दर्जा मिळवून देण्यात फिशर यांचा मोठा वाटा आहे.

भारतात सांख्यिकी विषयाला पुढे आणण्याचे प्रयत्न प्रशांतचंद्र महलानवीस या बंगाली व्यक्तीने केलं. केम्ब्रिज, इंग्लडमध्ये भौतिकशास्त्राचं शिक्षण घेताना त्यांना सांख्यिकीचं महत्त्व लक्षात आलं. म्हणूनच १९३१ मध्ये कोलकाता इथल्या प्रेसिडन्सी कॉलेजच्या त्यांच्या भौतिकशास्त्र विभागात त्यांनी भारतीय सांख्यिकी संख्या (इंडियन स्टॅटिस्टिकल इन्स्टिट्यूट) स्थापन केली. या संस्थेला त्यांनी थोड्याच अवधीत आंतरराष्ट्रीय दर्जा मिळवून दिला. त्यांनी १९३३ मध्ये सुरू केलेलं *संख्या जर्नल (संख्या-इंडियन जर्नल ऑफ स्टॅटिस्टिक्स)* हे जर्नल विस्तारलं असून जगभर प्रसिद्ध आहे.


प्रशांतचंद्र महलानवीस

दुसऱ्या पंचवार्षिक योजनेच्या आखणीत या संस्थेचा मोठा हातभार लागला. त्यामुळे सांख्यिकीला आपल्या देशात प्रतिष्ठा लाभली. तसंच प्रत्येक राज्यात अर्थ आणि सांख्यिकी ब्यूरो (आता संचालनालय) तसंच राष्ट्रीय पातळीवर सेण्ट्रल स्टॅटिस्टिकल ऑर्गनायझेशन आणि नॅशनल सॅम्पल सर्व्हे यांची स्थापना झाली. १९४१ मध्ये कोलकाता आणि १९४८ मध्ये मुंबई युनिव्हर्सिटीमध्ये एम. ए. इन स्टॅटिस्टिक्स कोर्स सुरू झाला. या सर्व प्रोत्साहनामुळे भारतीय सांख्यिकींची (स्टॅटिस्टिशियन्स) एक उज्ज्वल परंपरा उदयास आली. आजही आंतरराष्ट्रीय पातळीवर भारतीय सांख्यिकींचं योगदान वाखाणलं जातं. सी. आर. राव, पी. व्ही. सुखात्मे, बी. व्ही. सुखात्मे, आर. सी. बोस, जी. कल्याणपूर, एस. एस. श्रीखंडे, व्ही. एस. हुजुरबजार, व्ही. पी. गोडांबे आदी नावं सांख्यिकी क्षेत्रात वारंवार घेतली जातात.

जन्म ते मृत्यूनोंदीपर्यंतच्या काळातील आपल्या सर्व घटना आणि कृती कोणत्यातरी आकडेवारीत भर घालतात. त्याचा अभ्यास स्टॅटिस्टिशियन्स सातत्याने करत असतात. त्यानुसार शासनव्यवस्था तसंच उत्पादक निर्णय घेत असतात आणि प्रणालीत बदल करत असतात. एकूणच सांख्यिकी शास्त्राचा विकास आणि व्यापक उपयोग स्पष्ट होतो.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्र पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आले आहे व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

प्रशांतचंद्र महलानवीस - www.isid.ac.in

३९

रेंगाळलेले प्रश्न

+× ∑ ∫

गणिताचा प्रचंड विकास झाला असला तरी अनेक प्रश्न अजूनही पूर्णपणे सोडवता आलेले नाहीत. त्यांतील काही प्रश्न अनेक शतके जुने आहेत. गणितज्ज्ञ आणि गणितात रस असणाऱ्या व्यक्ती अशा प्रश्नांवर सातत्याने विचार करत असतात. या लेखात आपण अशा दोन प्रश्नांचा इतिहास पाहणार आहोत.

फर्माचा अंतिम सिद्धांत: फर्मा (१६०१-१६६५) हा एक हौशी, पण प्रथम श्रेणीचा फ्रेंच गणितज्ज्ञ होता. त्याने आपले शोध स्वतंत्रपणे कधी प्रसिद्ध केले नाहीत. तो आपल्या नोंदवहीत हे लिहून ठेवत असे किंवा इतर गणितज्ज्ञांना पत्राद्वारे कळवत असे. त्याच्या मृत्यूनंतर त्याच्या मुलाने फर्माचे अनेक अभिप्राय असलेले जुने डायफण्टुस याचे समीकरणावरील पुस्तक प्रसिद्ध केले. तिथे एका प्रश्नासमोर फर्माने लिहिलं होतं, की मला याचं प्रूफ माहिती आहे, पण ते लिहिण्यास समासातील जागा अपुरी आहे. तो प्रश्न होता, 'न'चं मूल्य दोनपेक्षा अधिक असेल तर $अ^{न} + ब^{न} = क^{न}$ याचं अ, ब आणि क पूर्णांक असतील असं उत्तर काढणं शक्य नाही.

१८व्या शतकात प्रसिद्ध गणितज्ज्ञ ऑयलर यांनी न = ३ आणि ४ यासाठी फर्माचं म्हणणं बरोबर असल्याचं सिद्ध केलं. मात्र, ‘न’चं मूल्य पाच किंवा अधिक असेल तर काय हा प्रश्न अनुत्तरित राहिला. म्हणून त्याला फर्माचा अंतिम सिद्धांत (ज्याची सिद्धता झाली नाही) असं नाव पडलं.

सोफी जर्मेन (१७७६–१८३१) या असामान्य फ्रेंच गणिती महिलेने या बाबतीत महत्त्वपूर्ण योगदान दिलं. ‘न’ आणि (२न+१) हे दोन्ही अंक प्राइम नंबर असल्यास फर्माचा सिद्धांत बरोबर असल्याचं तिने सिद्ध केलं. त्या काळी महिलांना त्यांचं गणिती काम प्रसिद्ध करणं स्वतंत्रपणे शक्य नव्हतं. तिचे निष्कर्ष १८०८ मध्ये लिजेण्डर या फ्रेंच गणितज्ज्ञाने प्रसिद्ध केलेल्या पुस्तकात जर्मेन यांना श्रेय देऊन पुढे आणलं. जर्मेन यांनी प्रचंड विरोध सहन करत अतिकष्टाने उच्च गणितीचा मान मिळवला. त्यांच्या इलॅक्टिक सरफेसबाबतच्या मूळ गणिती शोधाचाच आधार घेऊन पुढे आयफेल टॉवर बांधण्यात आला. त्या टॉवरच्या पायावर योगदान करणाऱ्या ७२ व्यक्तींमध्ये मात्र तिचं नाव नाही याची खंत वाटते.

त्यानंतर ‘न’चं मूल्य ५ आणि ७ असेल तर फर्मा सिद्धांत बरोबर असल्याचं १८२५ मध्ये डीरीचले आणि लामे यांनी क्रमशः सिद्ध केलं. १९०९ मध्ये पॉल वॉफ्सेल या धनिक जर्मन गणितज्ज्ञाने फर्माचा सिद्धांत पूर्णपणे सिद्ध करणाऱ्यास बक्षीस जाहीर केलं. साहजिकच अनेक व्यक्तींनी यासाठी प्रयत्न केले, पण समाधानकारक उत्तर सापडलं नाही.

या सर्व प्रयत्नांमुळे मात्र गणितात अनेक प्रकारची भर पडत गेली. १९८७ मध्ये केनेथ रिबेटने याबाबत एक महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष प्रसिद्ध केला. त्याच्या आधाराने अमेरिकेत कार्यरत असलेल्या मूळच्या ब्रिटिश गणितज्ज्ञ ॲण्ड्र्यू वाइल्सने सहा वर्षं एकाकी राहून फर्मा सिद्धांत संलग्न अशा वेगळ्या गणिती स्वरूपात मांडून सिद्ध करण्यात यश मिळवलं. १९९३ मध्ये इंग्लंडमध्ये एका गणिती परिषदेत त्याने ते प्रचंड प्रूफ सादर केलं. पण नंतर त्यात काही उणिवा आढळल्या. आणखी मेहनत घेऊन त्याने फर्माचा अंतिम सिद्धांत संपूर्णपणे सिद्ध केला (१९९४). जवळजवळ ३५० वर्षांचा काळ आणि गणितातील इतर अनेक विकास आणि असंख्य गणितज्ज्ञांचे प्रयत्न यामुळे हे शक्य झालं.

चार रंगात नकाशा रंगवणं (फोर कलर प्रॉब्लेम): इंग्लंडमधील काउण्टीस दर्शवणारा नकाशा रंगवताना फ्रान्सिस गुथरेला १८५२ मध्ये असा प्रश्न पडला, की कोणताही नकाशा रंगवण्यास चार रंगच पुरे आहेत का, ज्यामध्ये कोणतेही एकमेकांना जोडणारे दोन भाग वेगळ्या रंगाचे हवेत ? याचं उत्तर मिळवण्यासाठी त्याने लंडनमधील गणिताचे प्रसिद्ध प्राध्यापक ए. डी. मॉर्गन यांच्याशी संपर्क साधला. याबाबत मॉर्गनने डब्लिन इथल्या ग्राफ थिअरीतज्ज्ञ सर डब्ल्यू. आर. हॅमिल्टन यांना पत्र पाठवलं. मॉर्गनचं स्वतःचं उत्तर 'होय' असं होतं, मात्र हॅमिल्टन यांनी 'वेळ नाही' असं उत्तर दिलं. (ते ऐतिहासिक पत्र ट्रिनीटी कॉलेजच्या म्युझियममध्ये जपून ठेवलं आहे.) या प्रश्नाचा उल्लेख मॉर्गन यांनी १८६० मध्ये एका पुस्तक परीक्षणामध्ये केला.

या प्रश्नाचा पाठपुरावा ऑर्थर केले या गणितज्ज्ञाने केला. त्याबाबत रॉयल जिओग्राफिकल सोसायटीचं लक्ष वेधलं. ए. बी. केम्प या केलेच्या विद्यार्थ्याने या प्रश्नाचं एक गणिती प्रूफ अमेरिकन जर्नल ऑफ मॅथेमॅटिक्समध्ये १८७९ मध्ये प्रसिद्ध केलं. पी.जे. हीवूड यांनी १८९० मध्ये त्यात चूक शोधून काढली आणि या प्रश्नावर खूप संशोधन केलं. त्यांनी पाच रंग पुरेसे आहेत, असंही सिद्ध केलं. जेव्हा ते ९० वर्षांचे होते तेव्हाही त्यांनी यासंदर्भात एक शोधलेख प्रसिद्ध केला होता.

ओ. व्हेब्लेन याने १९१२-१३ मध्ये सिमित भूमिती आणि इन्सिडन्स मॅट्रिक्सेस ओव्हर अ फिल्ड यातील संकल्पना वापरून या प्रश्नाला वेगळ्या स्वरूपात मांडलं. १९१३ मध्ये डी. बिरखॉफने हा प्रश्न दुसऱ्या स्वरूपात सोडवण्याचा प्रयत्न केला.

या प्रश्नाचं पूर्णपणे 'होय' असं उत्तर १९७३ मध्ये के. एपेल आणि डब्ल्यू. हाकेन यांनी ९० पानी लेखाद्वारे सिद्ध केलं. त्यासाठी त्यांना कम्प्युटरची मदत घ्यावी लागली. त्याचं उत्तर, की कोणताही नकाशा रंगवण्यास चार रंग पुरेसे आहेत, हे विधान सत्य असल्याची संभाव्यता एक आहे असं आहे. पारंपरिक गणिती विचारसरणीत कम्प्युटर आणि संभाव्यता आधारे सिद्धता देणं बसत नाही. साहजिकच या पद्धतीबाबतच गणिती वर्तुळात भिन्न प्रतिक्रिया उमटल्या. आजही वेगळ्या मार्गाने या प्रश्नाचं उत्तर शोधण्याचे प्रयत्न सुरू आहेत. २००० मध्ये भारतातील आशय धारवडकेर याने याबाबत वेगळं प्रूफ सादर

केलं आहे. त्याचा अभ्यास अनेक गणितज्ज्ञ करत आहेत. (पहाः http://www.geocities.com/dharwadker).

वरकरणी सोपे दिसणारे गणिती प्रश्न प्रत्यक्षात सिद्ध करण्यास कठीण असतात हे वरील दोन प्रश्नांवरून लक्षात येतं.[१] गणितज्ज्ञ स्वतंत्र रीतीने काम करत असले तरी एकूण गणिताचा विकास एक प्रकारच्या सहकार्याने होत राहिला आहे.

✤

---

१) असाच एक अनुत्तरित प्रश्न कनजक्चर ऑफ गोल्डबॅक म्हणून प्रसिद्ध आहे. हा प्रश्न त्याने १७४२ मध्ये प्रसिद्ध गणिती ऑयलर याला पत्राद्वारे विचारला होता व तो म्हणजे, ''प्रत्येक सम संख्या (even number) ही दोन प्रमुख संख्यांची (prime numbers) बेरीज असते हे बरोबर आहे का ?''

४०

गणितातील शोकांतिका

+× ∑ ∫

मानवी इतिहासाप्रमाणेच गणिताच्या इतिहासात अनेक शोकांतिकांचा समावेश आहे. समाजातील घडामोडी, हेवेदावे आणि ईर्ष्या यांचा प्रभाव गणिती प्रतिभावंत आणि एकूण गणिताच्या विकासावर झालेला आढळतो. या लेखात निवडक अशा गणिती शोकांतिका जाणून घेऊ या.

गणित तसंच भौतिक शास्त्राच्या विकासात आर्किमिडीज (इ. स. पूर्व २८७-२१२) चं योगदान महत्त्वाचं आहे. त्याच्या मदतीमुळे त्यांच्या सिरेक्युज-सिसली सैन्याला वारंवार होणारी रोमन लष्कराची आक्रमणं थोपवण्यात यश मिळत होतं. मात्र, एका गाफील क्षणी रोमन सैन्य सिरेक्युज शहरात घुसलं. त्या वेळी आर्किमिडीज काही गणिती आकडेमोड करण्यात गढून गेला होता. तेव्हा एका रोमन सैनिकाने त्याला काही विचारलं. 'जरा थांब, हे गणित सोडवून तुला उत्तर देतो' या आर्किमिडीजच्या प्रतिसादाने त्या सैनिकाला राग आला आणि त्याने आर्किमिडीजचा शिरच्छेद केला. आज दोन हजारहून अधिक वर्षं लोटली, तरी तशी बुद्धिमत्ता असलेला कोणी जन्मला नाही असं मानलं जातं.

इ.स. ३७०-४१५ या काळात हिप्तीया ही एक नामांकित महिला गणितज्ज्ञ होऊन गेली. तिला गणिताचं शिक्षण तिचे वडील थीओन या सुप्रसिद्ध गणितज्ज्ञाने दिलं. अंकगणित आणि भूमितीत तिने चांगली भर घातली. गणिताची उत्तम शिक्षिका म्हणून तिचा लौकिक दूरवर पसरला होता. वडिलांच्या नंतर अलेक्झेण्ड्रिया इथल्या गणित अध्ययन केंद्राची ती प्रमुख झाली. तिच्या हुशारी आणि स्वतंत्र बाण्यामुळे काही व्यक्तींना तिचा राग येत होता. अशा एका द्वेषी समूहाने एके दिवशी तिला रस्त्यात गाठून जवळच्या चर्चमध्ये ओढून नेलं आणि क्रूरपणे तिची हत्या केली. गणितात योगदान देण्यापासून महिलांना वंचित करण्यास ही बाब दुर्दैवी ठरली.

एन. एच. एबेल (१८०२-१८२९) या नॉर्वेमधील गणितज्ज्ञाची कारकीर्द फक्त २७ वर्षांची. पण आजही त्याचं कार्य आपण वापरतो. घातसंख्या किंवा कोटी पाच असलेल्या समीकरणासाठी (इक्वेशन ऑफ डिग्री फाइव्ह) प्रमाणबद्ध सूत्र विकसित करणं शक्य नाही, हे त्याने सिद्ध केलं. तसंच ग्रुप थिअरिमध्ये महत्त्वपूर्ण योगदान त्याने दिलं. याचा उपयोग भौतिक शास्त्रात मोठ्या प्रमाणावर होतो. त्यामुळे त्याचे नाव दिलेल्या 'abelian group' याला अनन्यसाधारण महत्त्व आहे. आता एबेलचं नाव 'a' या इंग्रजीतील अक्षराने लिहिलं जाते. 'A' या अक्षराने नाही. असा मान विरळा आहे. मात्र, या गणिती युवकाच्या पदरी नेहमी निराशाच पडली. आर्थिक परिस्थिती अगदी बेताची होती आणि शिक्षकाची नोकरी मिळत नव्हती. म्हणून शिफारसपत्र मिळवण्यासाठी फ्रान्समधील तत्कालीन प्रसिद्ध गणिती ए. कौचीकडे त्याने आपले शोधनिबंध पाठवले. त्याला काही प्रतिसाद मिळाला नाही. दरम्यान टीबीमुळे त्याचा अकाली मृत्यू झाला. त्याच्या निधनानंतर दोन दिवसांनी त्याच्या पत्त्यावर बर्लिन विद्यापीठात गणिताचा शिक्षक म्हणून नेमणुकीचं पत्र पोहोचलं. पण तोपर्यंत उशीर झाला होता.


एन.एच. एबेल

अमूर्त बीजगणित (ॲब्स्ट्रॅक्ट ॲल्जिब्रा) विषयाचा पाया रचण्याचं श्रेय इ. गॅल्वा या फ्रेंच गणिती युवकास जातं. त्याचा जन्म १८११ आणि मृत्यू १८३२ मध्ये झाला. म्हणजे फक्त २१ वर्षं आयुष्य लाभलेल्या या गणितीने त्यातील बरंचसं आयुष्य कारावासात घालवलं. याचं मुख्य कारण म्हणजे

त्याचे जहाल राजकीय विचार. त्याचं गणित कार्य आणि पद्धती यांचं महत्त्व प्रस्थापित गणितज्ज्ञ आणि संस्थांना त्या वेळी समजलंच नाही.

एका महिलेच्या बदनामीवरून त्या वेळच्या प्रथेनुसार त्याला दंद्व करण्यास भाग पाडण्यात आलं. त्या आधीच्या रात्री त्याने आपले गणिती शोध एका पत्रात लिहून काढले आणि मित्राला कळवलं की ते इतर गणितज्ज्ञांना पाठवावं. दंद्वामध्ये प्रतिस्पर्ध्याने झाडलेल्या गोळ्या त्याच्या शरीरात घुसल्यामुळे तो जखमी झाला. रक्तस्त्रावाने त्याचा मृत्यू होईपर्यंत कोणी त्याची दखल घेतली नाही. मात्र, त्याचे गणिती निष्कर्ष चिरंतन ठरले यात वाद नाही. ग्रुप थिअरि वापरून समीकरणं सोडवण्याची त्याची कल्पना फारच उपयोगी सिद्ध झाली. Galois Field म्हणून एक संकल्पना त्याच्या नावाने ओळखली जाते.


इ. गॅल्वा

गणिताला एक वेगळी दिशा देण्याचं श्रेय जर्मन गणितज्ज्ञ जी. कॅण्टोर (१८४५-१९१८) याला दिलं जातं, सेट थिअरी तसंच 'इन्फिनिटी' (अनंताची) कल्पना वेगळ्या स्वरूपात मांडून गणिताच्या विकासासाठी त्याने नवी दालनं उघडली. मात्र, कॅण्टोर यांचं वैयक्तिक जीवन हलाखीचं आणि निराशपूर्ण होतं. मोठं कुटुंब आणि बेताची आर्थिक स्थिती ही एक बाजू, तर दुसरीकडे त्यांच्या गणिती योगदानाची त्या काळात होणारी उपेक्षा याने त्यांना वैफल्य आणि निराशाच दिली. यामुळे त्यांचं मानसिक संतुलन आणि प्रकृती बिघडत असे आणि त्यांना अनेक वेळा हॉस्पिटलमध्ये भरती व्हावं लागे. बर्लिन विद्यापीठात प्राध्यापक म्हणून काम करता आलं नाही याची खंत आयुष्यभर त्यांना त्रास देत राहिली. कारण तो एक मोठा मान होता. त्यांची बर्लिन विद्यापीठात नेमणूक न होण्यास कारण होते तिथले गणिती प्राध्यापक एल. क्रोनेकर. त्यांना कॅण्टोर याची अनंताची नवीन मांडणी पसंत नव्हती आणि त्यांच्या उपलब्धीमुळे असूयाही होती. मात्र आज कॅण्टोर यांचं नाव जास्त परिचित आहे.

त्याचप्रमाणे भारतीय गणिती चमत्कार म्हणजेच एस. रामानुजन (१८८७-१९२०) यांचा टीबीमुळे अकाली मृत्यू आणि ब्रिटिश गणितज्ज्ञ ए. ट्युरिंग (१९१२-१९५४) यांनी केलेली आत्महत्या या घटनाही एक प्रकारच्या शोकांतिकाच आहेत.

महिला गणितज्ज्ञांना योगदान न करू देणं, तसंच नांलदा, तक्षशिला आणि अलेक्झाण्ड्रिया इथल्या ग्रंथालयांचा नाश या प्रकारांनीही गणिताच्या विकासात अडचणी निर्माण केलेल्या आढळतात. अनेक वेळा गणितज्ज्ञानी आपल्या पद्धती गुप्त ठेवण्यावर भर देणं, तर काही वेळा गणिती संशोधनाचा प्रत्यक्षात उपयोग सरळपणे दिसत नसल्यामुळे आर्थिक साहाय्य बंद करणं अशा धोरणामुळेही गणिताचं नुकसान झालं. गणितातील मूलभूत आणि उपयोजित (प्युअर आणि अप्लाइड) संशोधन एकमेकांना पूरक आहेत ही बाब विसरता कामा नये. मुख्य म्हणजे सामाजिक आणि राजकीय अस्थिरताही गणिताला बाधक ठरते.

✤

टीपः या लेखातील छायाचित्रे पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आली आहेत व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

एन. एच. एबेल – www.win.tue.nl

इ. गॅल्वा - www.henrikkragh.dk

४१

भूमितीचा प्रवास

+× ∑ ∫

भूमितीची सुरुवात भू-मापन या उपयोगासाठी झाली. मात्र तिचा विकास फारच लक्षणीय ठरला आहे. अनेक शतके गणिताचा अभ्यास भूमितीशीच निगडित राहिला व ग्रीक सभ्यतेमध्ये भूमितीला अनन्यसाधारण महत्त्व प्राप्त झालं. भूमितीची बदलत गेलेली रूपे आणि व्यापक उपयोजिता यांचा संक्षिप्त आढावा तिची अबाधित महती दाखवतो.

गणित म्हणजेच गणनशास्त्राची सुरवात वस्तु-गणतीसाठी अंकगणित व भू-मापनासाठी भूमिती या दोन शाखांनी झाली. पूर्वापार भूमितीचा अभ्यास व वापर जमिन खरेदी-विक्री याशिवाय गृहनिर्माण, किल्ले, राजवाडे आणि धार्मिक स्थळे यांची रचना करणे तसेच ग्रह-तारे यांच्या कक्षा व परिक्रमांचा मागोवा घेण्यासाठी प्रामुख्याने होत असल्याचे गणिताचा इतिहास सांगतो.

मात्र भूमितीला मूलभूत गणित या स्वरूपात मांडण्याचे काम अलेक्झाण्ड्रियातील गणिती युक्लिड (इ.स. पूर्व ३२५-२६२) याने केले.

त्यांचे *'Elements'* हे याबाबतचे पुस्तक, जे की १३ भागांत म्हणजेच १३ पायपारसची भेंडोंळी (rolls) या स्वरूपात लिहिलेले आहे. त्यात युक्लिडने २३ व्याख्या, ५ साधारण कल्पना आणि ५ स्वयंसिद्ध गृहितके (postulates or axioms) या आधारे प्रतल किंवा पृष्ठ भूमिती यातील (plane geometry) ४६५ सिद्धांत तर्कशुद्ध पद्धतीने सिद्ध केले. आजच्या गणिताच्या पाठ्यक्रमात देखिल यातील बरेचसे सिद्धांत व प्रश्न सामाविष्ट असतात. गणिताचा औपचारिक (formal) विकास कसा करावा याबाबत युक्लिड याची ही भूमिती–निर्मिती पद्धती आदर्श ठरली व सर्वमान्य आहे हे विशेष.

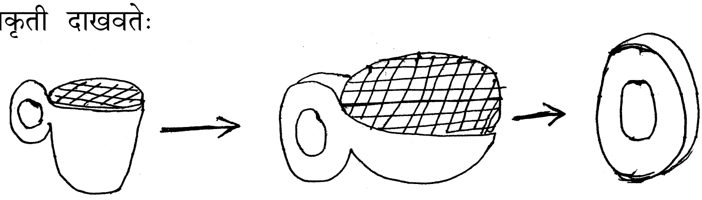
युक्लिडने मांडलेले पाचवे गृहितक म्हणजे, जर एक सरळ रेषा व तिच्या बाहेर एक बिंदू घेतला तर त्या बिंदुतून त्या रेषेला समांतर अशी फक्त *एकच* रेषा आखता येईल, हे स्वयंसिद्ध आहे की नाही याबाबत गणिती वर्तुळात सांशकता होती. मात्र दोन हजार वर्षांचा काळ लोटल्यावर रशियन गणितज्ज्ञ एन. आय. लोबाश्वेस्की (१८२९) व स्वतंत्रपणे हंगेरीयन गणितज्ज्ञ जे. बोलाई (१८३२) यांनी असे सिद्ध केले की जर या पाचव्या गृहितकात ‘‘अनेक समांतर रेषा आखणे’’ आणि बी. रिमान या जर्मन गणितज्ज्ञाने (१८५४) या गृहितकात ‘‘एकही समांतर रेषा न आखता येणे’’ असा बदल केला तरी युक्लिडचे सर्व सिद्धांत कुठलीही तार्किक अडचण न येता सिद्ध करता येतात हे दाखवले. मात्र अशा भूमितींचे स्वरूप प्रतल किंवा पृष्ठ भूमितीपेक्षा निराळे असेल असे पुढे आले. म्हणजेच युक्लिड याची भूमिती ही अनंत प्रकारे शक्य असलेल्या भूमितीपैकी एक आहे असा निष्कर्ष निघाला. मात्र आपल्या जवळ–जवळ सर्व दैनिक व्यवहारांसाठी युक्लिडची भूमिती परिपूर्ण आहे, पण वैश्विक पातळीवरील अभ्यासासाठी रिमान यांची भूमिती (जिचा उपयोग पुढे आइनस्टाइन यांनी केला) तर सूक्ष्म पातळीवर भौतिकशास्त्रातील कणांच्या अभ्यासासाठी लोबाश्वेस्की यांची भूमिती वापरणे योग्य ठरते. या प्रकारच्या भूमितींना आता नॉन–युक्लिडीयन भूमिती *(Non-Euclidean Geometries)* असे संबोधन आहे. भूमिती व एका अर्थाने गणिताच्या अभ्यासाला या शोधामुळे एक वेगळीच दिशा मिळाली हे मात्र निश्चित आहे.

भूमितीला अंकगणित व बीजगणित यांच्याशी जोडून कोओर्डिनेट भूमिती (co-ordinate geometry) व एनेलिटीकल भूमिती (analytical geometry) या वेगळ्या मार्गावर नेण्याचे काम फ्रेंच गणितज्ज्ञ आर. देकार्त (१५९६–१६५०) यांनी केले. भूमितीमधील कुठल्याही आकृतीला अंकाच्या संचाने

मांडता येणे त्यामुळे शक्य झाले व त्यामुळे पुढे गणकशास्त्र (calculus) याचा विकास होऊ शकला. तसेच गणित परिवर्तने उदा. (क्ष, ज्ञ) → (क्ष + ३, ज्ञ + ५), (क्ष, ज्ञ) → (४क्ष, ४ज्ञ), (क्ष, ज्ञ) → (क्ष, क्ष+ज्ञ) वापरून कोओर्डिनेट भूमिती (co-ordinate geometry) ला अफाईन भूमिती (affine geometry) या नवीन स्वरूपात मांडता येणे साध्य झाले. या विकासामुळे भूमिती व बीजगणितातील ग्रुप थिअरि यामध्ये संबंधही स्थापित करता आला. गणिताशिवाय भौतिकशास्त्रासाठी भूमितीची ही नवीन रूपे फारच उपयोगी सिद्ध झाली. स्फटीकांच्या रचनेचा अभ्यास (crystallography), मॅक्सवेल यांनी विद्युत–चुंबकीय क्षेत्राबाबत मांडलेल्या समीकरणांचा पुढील विकास, वास्तुशास्त्रातील अनेक संरचनांचा अभ्यास व नावीन्यपूर्ण भर घालणे असे विविध उपक्रम भूमितीच्या या नूतन प्रकारामुळे हाती घेता आले.

भूमितीचे आणखी एक रूप प्रोजेक्टिव भूमिती (projective geometry) या नावाने ओळखले जाते. त्याचा नकळतपणे उपयोग चित्रकार चित्रांची वास्तवता वाढवण्यासाठी हजारो वर्षे करत आले आहेत हे विशेष. याची गणिती सुरवात युक्लिडच्या काही सिद्धांतांमध्ये बिंदूच्या ऐवजी रेषा व रेषांच्या जागी बिंदू असे बदल करून झाली व त्याप्रकारे plane projective geometry या उपशाखेचा विकास झाला. आता तिचा आवाका विविध गणिती परिवर्तने (transformations) वापरून वाढवला जात आहे.

कुठलीही भूमिती आकृती किंवा वस्तू ताणली अथवा संकुचित केली तर तिच्या कुठल्या गणिती मोजमापीय गुणधर्मात (metrical features) फरक पडेल किंवा कसे या बाबतचा अभ्यास क्षेत्रविद्या म्हणजे टोपोलॉजी (Topology) या गणिती शाखेत होतो. जिचे मूळ भूमिती व बीजगणितात आहे. उदाहरणार्थ टोपोलॉजीच्या सिद्धांताप्रमाणे चहाचा कप व मेदूवडा (Torus) हे गणितीरित्या समान आकृतिबंध सिद्ध होतात जसे की खालील आकृती दाखवतेः



रबरी चादर भूमिती किंवा टोपोलॉजी हा शब्द ग्रीक भाषेतील 'टोपोझ (topos)' म्हणजे जागा व 'लोगोस (logos)' म्हणजे अभ्यास यांच्या संधीने

निर्माण झाला आहे. ऑयलर व कॅण्टोर या सुप्रसिद्ध गणितज्ज्ञांनी या विषयाला चालना दिली तर पाँयकर यांनी त्यात मोलाची भर १८९५ साली प्रसिद्ध केलेल्या *Analysis Situs* या पुस्तकाद्वारे घातली. एका अर्थाने टोपोलॉजीमुळे गणितातील विविध शाखांना एकत्रित आणण्याचे काम करता येते. या विषयाच्या पुढीलप्रमाणे प्रसिद्ध अशा उपशाखा आहेतः

- Point - Set Topology
- Algebraic Topology
- Geometric Topology including Knot Theory
- Differential Topology
- Digital Topology

टोपोलॉजीचा उपयोग दैनंदिन वापराच्या वस्तुंची संरचना (design) आकर्षक बनवण्यापासून ते अखिल ब्रह्मांडाच्या आकार-विश्लेषणासाठी केला जात असून प्रचंड प्रमाणात याबाबत संशोधन होत आहे. संगणकाची जोड मिळाल्यापासून या विषयाला वेगळीच महती प्राप्त झाली आहे.

कंगोरी भूमिती (fractal geometry) १९६० मध्ये बी. मँडेलब्रॉट या फ्रेंच गणितज्ज्ञाने विकसित केली. ही नवीन भूमिती निसर्गाच्या अभ्यासासाठी फारच उपयुक्त आहे तसेच अनेक क्षेत्रांत तिचा वापर होत आहे.

अणू-परमाणू रचना ते ग्रह-तारे यांच्या कक्षांचा अभ्यास भूमितीमधील संकल्पनांमुळेच शक्य झाला आहे. त्याचप्रमाणे मानवी मनातील विचार-रचनांची भूमिती कशी कार्य करते याचा अभ्यास हाती घेण्याची वेळ आता आली आहे असं म्हटलं जातं. अर्थातच भूमिती व गणितासाठी हे मोठे आव्हान आहे पण अशा प्रयत्नांतून भूमितीचा पुढील विकास होत राहील व तो वरदायी ठरेल अशी अपेक्षा आहे.

✤

४२

जटिलतेचं गणित

+× ∑ ∫

आपण अनेक प्रकारच्या जटिलतेतून प्रवास करत असतो. अर्थाचा अनर्थ होणे हे त्याचं एक उदाहरण आहे. तरी भाषा ते संगणक आधारित प्रणाली अशा विविध प्रकारच्या व्यवस्थेतून निर्माण होणाऱ्या जटिलतेचा अभ्यास करण्यासाठी काही नवीन गणिती उपशाखा व पद्धती विकसित झाल्या आहेत. गणिताची ही क्षमता आपल्याला वरदान ठरत आहे.

पूर्वी माणसाचं आयुष्य फार साधं व सरळ होतं, आता मात्र फार गुंतागुंतीचं व जटील झालेलं आहे असं विधान वारंवार आपण ऐकत आलो आहोत. मात्र त्याचा बारकाईने अभ्यास केला तर असं आढळतं की जटिलता ही माणसाच्या शरीर-रचनेपासूनच सुरू झालेली आहे आणि मनाच्या गहनतेचा थांगपत्ता पण अजून लागलेला नाही. त्यामुळे मानवनिर्मित गोष्टी किंवा व्यवस्था सहसा जटिलच बनत जातात. नैसर्गिक घटना सुद्धा कमी-अधिक प्रमाणात बिकट सिद्ध होतात, उदा. पाऊस, हवामान चक्र, भूकंप इत्यादी. तांत्रिक भाषेत या प्रकारच्या जटिलता, ज्या की अनेक स्वतंत्र

प्रणालीच्या एकमेकांवर विविध स्तरावर होणाऱ्या मिश्रण परिणामामुळे तयार होतात, त्यांना व्यामिश्रता (complexity) या नावाने संबोधले जाते. व्यामिश्रतेचा गणिती अभ्यास अनेक दशकांपासून सुरू आहे. त्यातून Mathematics of Complexity असा एक विषय पुढे आला आहे.

व्यामिश्रतेला सहसा पुढील तीन वर्गात मांडले जातेः

१) साधी व्यामिश्रता (Simple Complexity)

२) असंघटित व्यामिश्रता (Disorganised Complexity)

३) संघटित व्यामिश्रता (Organised Complexity)

साधी व्यामिश्रता भौतिकशास्त्र, रसायनशास्त्र व गणितातील मूलभूत सिद्धांत व प्रक्रियेने हाताळणे शक्य झाले आहे. असंघटित व्यामिश्रता ही नैसर्गिक यादृच्छिकता (randomness) व अनिश्चितता (uncertainty) यामुळे निर्माण होते व तिला संभाव्यता व सांख्यिकी शास्त्राच्या आधाराने नियंत्रित करणे शक्य होते. प्रश्न आहे तो संघटित व्यामिश्रता काबूत आणण्याचा. ही जटिलता मुख्यतः प्रक्रियेचे संघटन अनेक प्रकारे होण्याच्या शक्यतेमुळे उद्‌भवते. उदा. एका खणात फक्त पाच पुस्तके मांडावयाची झाली तरी एकूण ५×४×३×२×१=१२० इतक्या प्रकारे ते शक्य आहे. ग्रंथालय व माहितीशास्त्राची सुरुवात आणि पुढील विकास माहितीक्षेत्रातील याप्रकारे प्रचंड होत जाणाऱ्या व्यामिश्रतेवर मात करण्यासाठी होत आहे.

गणिती अभ्यासानुसार व्यामिश्रतेची दोन प्रमुख रूपे आहेत. एक म्हणजे कोलाहल (Chaos). हा कुठल्याही संहतीत (entity) होणारे बदल स्वैरपणामुळे होतात असे दर्शवितो. मात्र याचा सखोल अभ्यास असे दाखवतो की या स्वैरपणामागे व अनियमित भासणाऱ्या गोष्टीमागे नियमित भूमितीय रूपांतरे (regular geometric transformations) आणि निश्चिततावादी (deterministic) नियम असतात. दुसरे रूप आहे स्वयंसंघटन (Self-organisation). इथे सुव्यवस्था, संरचना व एक प्रकारची संतुलित अवस्था स्वयंसिद्ध प्रकारे निर्माण होत असतात. मात्र त्यांचे भाकीत करणे शक्य नसते. कारण संहती किंवा बाबी असंतुलित स्थितीमध्ये कुठल्या मार्गाने जाईल व त्यापुढे आणखी कुठला मार्ग पत्करला हे ओळखणे अशक्य असते. प्रत्येक अशा मार्ग द्विभाजनापासून (Bifurcation) एक नवीन स्वयंसंघटन कार्यरत होते व पुढील द्विभाजनापर्यंत टिकते. याबाबत गणितात अनेक प्रकारचे संशोधन चालू असून, अनोखे आकर्षक सिद्धांत (Theory of Strange Attractors),

कंगोरी भूमिती (Fractal Geometry), ऱ्हासीय संरचना सिद्धांत (Theory of Dissipative Structures) अशा अरेषीय गणित (Nonlinear Mathematics) या शीर्षकाखाली व्यामिश्रतेचा अभ्यास केला जात आहे.

आपल्याला आणखी एका प्रकारच्या अनिश्चिततेचा सामना करावा लागतो व ती म्हणजे भाषेमुळे निर्माण होणारी अनिश्चितता. याला एक कारण म्हणजे एखाद्या गोष्टीची जाणीव मनुष्याला ज्याप्रकारे जाणवते ती संपूर्णपणे व्यक्त करता न येणं. उदाहरणार्थ, ''ही मोटारगाडी किती वापरली आहे हे मला माहीत नाही पण ती अजून उत्तमपणे सेवा देते'' असं विधान. यासाठी एक गणिती पद्धती विकसित झाली आहे व तिचे नाव फझी सेट थिअरि (Fuzzy Set Theory) असे आहे. एल. झाडे (L. Zadeh) या अमेरिकन गणितज्ञाने १९६५ साली *इनफरमेशन अँड कंट्रोल* या जर्नलमध्ये प्रसिद्ध केलेल्या एका लेखाने याची सुरुवात झाली. आज त्याचा प्रचंड विस्तार झाला असून अनेक पुस्तके व लेख याबाबत उपलब्ध आहेत. तसेच या विषयाला वाहिलेले *International Journal of Fuzzy Sets and Systems* गेली दोन दशके नवीन संकल्पना व उपयोजितेबद्दलचे लेख प्रसिद्ध करत आहे.

Fuzzy Set Theory चा मुख्य गाभा म्हणजे अनिश्चितता हाताळण्यासाठी तुलनात्मक गुणाला (०,१) या अंतराळात योग्य प्रकारे बसवायचे. उदा. शून्य म्हणजे 'नापसंती' किंवा 'निष्कृट' तर एक म्हणजे 'संपूर्ण पसंती' किंवा 'अत्युत्तम' व मधील ०.१, ०.२, ०.३ ... असे आकडे पसंती किंवा दर्जाची तीव्रता दर्शवितात. उदाहरणार्थ, 'अमोघ हा उंच मुलगा आहे' या वाक्यात अनिश्चितता दडली आहे. कारण जर त्याला त्याच्या वर्गात उभे केले तर तो उंच भासत असेल पण त्याला बास्केटबॉल खेळणाऱ्या संघाबरोबर उभे केले तर तो खुजा ठरू शकेल. अशा परिस्थितीमुळे (५'६'', ६'१०'') अशा स्वरूपात उंचीमापनाचा अंतराळ ठरवून त्याची सांगड (०,१) या अंतराळाशी घालायची व अमोघची प्रत्यक्ष उंची त्याप्रमाणे या अंतराळात दाखवायची असं ही गणितीपद्धत सांगते. अशा प्रकारे संकलित केलेल्या माहितीवर अंकगणित, बीजगणित व इतर सर्व गणितीय पद्धतींचा वापर करणे शक्य आहे. या प्रकारे विश्लेषण करण्यासाठी फझी लॉजिक (Fuzzy Logic) ही निर्माण करण्यात आले आहे. त्याचाच वापर स्वयंचलित यंत्रे जशी की कपडे-धुलाई यंत्र (washing machine), मायक्रोवेव्हओव्हन इत्यादीमध्ये केला जात आहे.

मात्र भाषेची व्यामिश्रता पूर्णपणे हाताळणे शक्य झालेले नाही. कारण शब्द व वाक्य उच्चारले म्हणजे त्यांना अर्थ प्राप्त होत नसून ऐकणारा त्यांना कुठल्या पद्धतीने ग्रहण करतो त्यावर तो अवलंबून असतो. रंगभूमीवरील अभिनय म्हणूनच एक श्रेष्ठ कला आहे. प्रत्येक खेळ हे आव्हान असतं व वाक्यांच्या फेकीनं व हावभावांनी प्रेक्षकांना आपल्याला (नाटक-लेखकाला) अभिप्रेत असलेला अर्थ पटवून देणे हे कठीण काम असतं. अचूकता (Precision) शब्दात पकडता येणे याबाबतची व्यामिश्रता कमी करणं फार गरजेचं आहे.

संगणकाच्या विकासामुळे आणखी एका प्रकारची व्यामिश्रता पुढे आली आहे जिला Computational Complexity असं नाव आहे. कुठलाही गणिती प्रश्न सोडवण्यासाठी अनेक पायऱ्या (Steps) असलेली पद्धती वापरावी लागते व तिला Algorithm असं म्हटले जातं. अशा पद्धतींना संगणकीय भाषेत रूपांतरित करून संगणकाद्वारे उत्तरं मिळवली जातात. संगणकावर कमीत कमी वेळ लागेल अशी पद्धती जास्त कार्यक्षम असा निष्कर्ष काढला जातो. म्हणूनच गणितीपद्धतीची वेळ-व्यामिश्रता (time complextiy of algorithm) मोजली जाते. यासाठी किती गणितीप्रक्रिया करावयास लागतात याचा हिशोब केला जातो. या विषयात अनेक प्रकारे संशोधन चालू असून अधिक कार्यक्षम गणिती पद्धतींचा विकास कसा करावा याबाबतही मार्गदर्शन मिळत आहे. संगणकाचा वापर करताना वेळेबरोबरच संगणक स्मृती (memory) ची बचत हे पण महत्त्वाचे ठरते. त्यासाठी पद्धतीची स्मृती-जागेची व्यामिश्रता (space complexity of algorithm) मोजणे गरजेचे आहे. मात्र त्याचे गणित फार जिकिरीचे आहे कारण संगणकावर माहिती हाताळणाऱ्या संरचनेचा (Data handling structure) प्रभावपण लक्षात घ्यावा लागतो. संगणकांच्या बदलत जाणाऱ्या तंत्रज्ञानामुळे या विषयात सतत संशोधन होत राहणार आहे हे मात्र निश्चित आहे.

जागतिकीकरणामुळे आपल्या आर्थिक, सामाजिक व इतर अनेक व्यवस्था महाकाय होत जात आहेत व कुठेतरी घडलेली लहानशी घटना या व्यवस्थेवर परिणाम करू शकते जसं की शेअर-बाजारातील चढाव-उतार. म्हणूनच व्यामिश्रतेचा अभ्यास गणिती स्वरूपात करणे ही काळाची गरज ठरली आहे.

✤

४३

लेखनाचं गणित

+× ∑ ∫

गणिताचं लेखन कसं असतं याबद्दल मागे चर्चा केली आहे. पण कुठल्याही लेखनाचं गणित मांडता येतं हे सहसा लक्षात येत नाही. मुख्यतः लिखाणातील स्पष्टता किंवा दुर्बोधता मोजण्यासाठी अनेक सोप्या गणिती प्रक्रिया उपलब्ध आहेत. तसेच संगणकाच्या आधारे भाषांतर करण्यासाठी गणिती मॉडेल्स तयार केली जात आहेत. तरी या गणितीपद्धतींचा उपयोग लेखनाचा दर्जा वाढवण्यासाठी जरूर करावा.

ललितलेखन, गंभीर साहित्य लेखन, निबंध, कविता, शास्त्रीय लेखन अशा विविध प्रकारांतून वाचकांचं मनोरंजन, प्रबोधन व ज्ञानवर्धन करण्याचा प्रयत्न केला जातो. या प्रत्येक साहित्य प्रकाराचे रूप कसं असावे याबाबत काही संकेत व प्रथा रूढ झालेल्या आहेत. मात्र त्यांच्या अंतर्गत राहून देखिल प्रत्येक लेखक आपल्या लेखनाची एक वेगळी शैली विकसित करतो आणि वाचकांना मोहित करतो. हा सगळा खेळ शब्दांचा आहे तर मग त्याचं गणित म्हणजे काय असा प्रश्न तुमच्या मनात येणं साहजिकच आहे.

भाषासौंदर्य ही बाब बाजूस ठेवली तर लिखित मजकूर वाचकांसाठी स्पष्टपणे मांडला जाणं याला महत्त्व देण्यात यावं याबाबत वाद नसावा. म्हणजेच अपेक्षित वयोगट अथवा वैचारिक पातळी वरील वाचकांसाठी लिहिलेलं साहित्य त्यांना सहजपणे वाचता यावं व त्याचा अर्थ समजण्यास फार ताण पडू नये अशी अपेक्षा गैरवाजवी ठरू नये. साहजिकच लिखित साहित्याची स्पष्टता कशी मोजावी असा प्रश्न मनात येतो. कारण अनेक वेळा लिखित मजकूर सुस्पष्ट असणे नितांत आवश्यक असते. उदाहरणार्थ, यंत्र कसं वापरावं, औषध किंवा पदार्थ कसे तयार करावे अशा प्रकारच्या सूचना देणारी पुस्तके, मार्गदर्शन पुस्तिका आदी साहित्य चुकायुक्त व समजण्यास कठीण असेल तर त्याचे अनिष्ट व दूरगामी परिणाम होऊ शकतात.

म्हणूनच लिखित साहित्याची सुस्पष्टता मोजण्यासाठी अनेक गणिती सुत्रे निर्माण करण्यात आली आहेत. त्यांचा वापर करून कुठल्याही मजकुराचा एक नमुना तपासून एक निर्देशांक तयार करणे व त्याद्वारे त्या मजकुराच्या स्पष्टतेबाबत भाष्य करणे अशी ही प्रक्रिया केली जाते. याच आधारे ते साहित्य कुठल्या वयोगटासाठी उपयुक्त आहे हे सुद्धा ठरवणे शक्य होते. इंग्रजीतील लिखित साहित्याची अस्पष्टता मोजण्यासाठी 'धुसरता निर्देशांक' (Fog Index) तयार केला जातो. मात्र त्याचा उपयोग भारतीय भाषांतील साहित्यासाठी करण्यात काही अडचण नाही. हा निर्देशांक तयार करण्यासाठी खालील सोप्या गणितीप्रक्रियेचा वापर करावा लागतो. ही प्रक्रिया एक उदाहरणाने समजावून घेऊ या.

१) एका विचारार्थ लेखातील १०० शब्दांच्या आसपास भरतील असा सलग मजकुर कुठूनही निवडावा. असं गृहीत धरू या की असे शब्द १०९ भरतात (अ = १०९).

२) सदर निवडलेल्या मजकुरातील संपूर्ण वाक्यांची गणना करावी. असे मानूया की ती सहा वाक्यं आहेत (ब = ६).

३) एका वाक्यात सरासरी शब्द किती आहेत याची गणना अ ÷ ब या पद्धतीने करावी. आपल्या उदाहरणात, क = अ/ब = १०९/६ = १८.१ म्हणजे १८ धरावी.

४) तीन अक्षरांपेक्षा जास्त अक्षरे असलेले मोठे शब्द मोजावे. असं मानूया की आपल्या उदाहरणात असे १२ शब्द आहेत (ड=१२).

५) वर म्हटल्याप्रमाणे मोठ्या शब्दांची एकूण शब्दातील टक्केवारी (ड×१००)/अ या सुत्राने काढावी. आपल्या उदाहरणात त्या प्रमाणे, प=(१२×१००)/१०९=११% असं उत्तर येतं.

६) धुसरता निर्देशांक = *(क+प) × ०.४* या सुत्राने काढावा. आपल्या उदाहरणाप्रमाणे, धुसरता निर्देशांक = (१८+११)×०.४=११.६ असा प्राप्त होतो.

अनेक अभ्यासावरून सुस्पष्टतेसाठी असं प्रमाण तयार करण्यात आलं आहे की धुसरता निर्देशांक ७ व ८ यांच्या घरात असावा. जसजसे या निर्देशांकाचे मूल्य वाढत जाते, धुसरपणा वाढत जातो, म्हणजेच अर्थ सहजपणे काढणे शक्य होत नाही. जर हा निर्देशांक १२ पेक्षा अधिक असेल तर ते लेखन बरेच बोजड व क्लिष्ट आहे असं आढळतं. कायदा क्षेत्रातील दस्तऐवज (legal documents) यांचा धुसरता निर्देशांक सहसा मोठा असतो. मात्र धुसरता निर्देशांक चारपेक्षा कमी असेल तर ते लेखन अगदी बाळबोध पद्धतीचं आहे असा अर्थ निघतो.

धुसर निर्देशांक या व्यतिरिक्त अनेक गणिती पद्धती सूत्रे व आलेख या स्वरूपात आता उपलब्ध आहेत ज्यांचा वापर करून लिखित मजकुराची सुस्पष्टता व वयोगटानुसार उपयुक्तता तपासता येते. त्यांतील काही पुढीलप्रमाणे आहेतः

- Fry Readability Graph
- Powers - Summer - Kearl Formula
- McLaughlin 'SMOG' Formula
- FORECAST Formula
- Flesch Reading Ease

संगणकाद्वारे लेखन करण्यासाठी सर्वसाधारणतः वापरले जाणारे MS Word या पॅकेजमध्ये वरील यादीतील शेवटची पद्धती व तिचे एक आणखी रूप उपलब्ध आहे व त्यांचा वापर करून आपल्या लेखनाची स्पष्टता व सहजता मोजणे प्रत्येकाला शक्य आहे. संगणकाचा असा भरपूर उपयोग करून घेतला पाहिजे. मात्र लक्षात ठेवलं पाहिजे की या गणितीपद्धतींनी आपल्याला ढोबळपणे लेखनाबाबत मार्गदर्शन मिळतं, कारण अनेक वेळा लेखनाची विशिष्ट

पद्धत वापरणेच योग्य ठरतं जसं की शास्त्रीय शोधलेखन व अशावेळी निर्देशांकासाठी तडजोड करू नये.

लेखनशैलीचा अभ्यास शास्त्रीय पद्धतीने करण्यासाठी Content Analysis हे एक शास्त्र विकसित झालं आहे. शब्दप्रयोगाची वारंवारता (Frequency) व एकूण लेखनाची संरचना यांचा अभ्यास या शास्त्रात विशिष्ट सांख्यिकी व गणितीपद्धती वापरून करण्यात येतो. त्याचप्रमाणे लेखनाचं भाषांतर करण्यासाठी व त्यासाठी संगणकाचा उपयोग करून घेण्यासाठी अनेक गणिती मॉडेल्स वापरण्यात येत आहेत.

अनेक गहन ग्रंथ व साहित्य असं आहे की त्यात दडलेले विचार व संदेश सहसा लक्षात येत नाहीत. अशा साहित्याला अंकीय स्वरूपात (digital form) आणल्यास Text Mining अशा संगणकीय शोधपद्धतीने तपासणे शक्य आहे. ही पद्धत संगणकावर आधारित सर्वसाधारण Data Mining या माहिती विश्लेषण पद्धतीचा एक भाग आहे जी की अनेक गणिती व सांख्यिकी अनुमान पद्धतीवर आधारलेली आहे. त्याच प्रमाणे Information Theory या गणिताच्या एका शाखेचा उपयोग लेखनात आधिक्य (redundancy) किती प्रमाणात आहे हे मोजण्यासाठी केला जातो. त्याचप्रमाणे मजकुराला गूढ भाषेत बदलणे व गूढ संदेशांची फोड करणे यासाठी Cryptology या गणिती शाखेचा भरपूर वापर होतो.

वरील चर्चेवरून लक्षात येते की साहित्य क्षेत्रात देखिल गणिताचा उपयोग अनेक प्रकारे केला जातो व संगणकाची जोड मिळाल्यामुळे त्याची व्यापकता वाढत आहे. तरी लेखकांनी या गणिती विश्लेषणाचा वापर आपले लेखन अधिक परिणामकारक व समृद्ध करण्यासाठी जरूर करावा.

✤

४४

वितरणाचं गणित

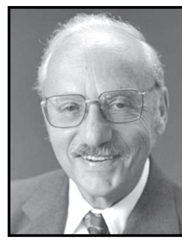
+× ∑ ∫

वेळ, पैसा आणि अशी इतर साधनं यांचा वापर चांगल्या प्रकारे व्हावा ही प्रत्येकाची इच्छा असते. तरी मर्यादित गोष्टींचं वाटप दिलेले उद्दिष्टं गाठण्यासाठी कसं करावं यासाठी लिनिअर प्रोग्रामिंग या गणिती पद्धतीचा उदय दुसऱ्या महायुद्धात झाला. आता या विषयाचा विस्तार तसेच उपयोग प्रचंड प्रमाणावर होत आहे. आपल्या देशातील रेल्वे, टपालसेवा, जलसाधनांचा विकास अशा महाकाय व्यवस्थांच्या व्यवस्थापनेसाठी हे वितरणाचे गणित फारच उपयुक्त आहे.

कळत नकळत आपण सर्वजण एक गणित नेहमी सोडवत असतो आणि ते म्हणजे वितरणाचं गणित. जसं की उपलब्ध वेळ, जागा, उत्पन्न आदींचा वापर विभिन्न गोष्टींसाठी कसा करावा, ज्यामुळे जास्तीत जास्त फायदा होईल किंवा कमाल समाधान मिळेल, किंवा कमीत कमी तोटा होईल किंवा कमी श्रम पडतील. याचं सर्वसामान्य उदाहरण म्हणजे अर्थसंकल्प किंवा बजेट तयार करणे ज्यामुळे उपलब्ध निधीचा सुयोग्यपणे वापर होईल. आश्चर्य म्हणजे प्रत्येक सजीव वस्तू आपल्यापरीने सतत असं गणित सोडवत असते.

असाच प्रश्न दुसऱ्या महायुद्धात अमेरिकेच्या वायुसेनेला भेडसावत होता. मर्यादित विमाने, प्रशिक्षित वैमानिक व इंधन आणि दुसऱ्या बाजूस शत्रुच्या ठिकाणांवर हवाई हल्ले करणे, आपल्या जल व स्थलसेनेस संरक्षण देणे व सामुग्री पुरवणे, जखमी सैनिकांना सीमेवरून परत आणणे अशी अनेक उद्दिष्टे या दोघांची सांगड कशी घालायची हा मुख्य प्रश्न होता. अशा अनेक समस्यांसाठी विविध क्षेत्रांतील तज्ज्ञांना एकत्रित बोलावून उत्तरं शोधण्याचा प्रयत्न केला गेला. या समुहाला Operations Research Group असं नाव देण्यात आले. या समुहाने अनेक लष्करी प्रश्नावर नवीन पद्धतीने विचार केला व प्रक्रिया करण्याच्या पद्धती शोधून काढल्या, ज्यांनी ऑपरेशन्स रिसर्च या विषयाची सुरवात झाली.

वरील समुहात गणित व सांख्यिकी विषयात पारंगत असलेल्या जी.बी. डँटझिग (G. B. Dantzig) या अमेरिकन तज्ज्ञाचा समावेश होता. डँटझिग (१९१४-२००५) यांचे वडील टोबीन डँटझिगही गणितज्ज्ञ होते व त्यांचं *Numbers* हे अतिशय गाजलेलं पुस्तक आहे. मर्यादित संसाधनाचे वाटप करण्यासाठी जी.बी. डँटझिग यांनी एक गणिती प्रतिकृती (Model) तयार केली व तिचे उत्तर शोधण्यासाठी एक नावीन्यपूर्ण पद्धत विकसित केली. त्या प्रतिकृतीला सरळरेषीय प्रयोजन (लिनिअर प्रोग्रामिंग मॉडेल- Linear Programming Model) व उत्तर-पद्धतीला सिंप्लेक्स मेथड (Simplex Method) अशी नावं देण्यात आली. ही पद्धत आवर्तनावर (Recursion) आधारित असल्यामुळे त्याच सुमारास विकसित झालेल्या संगणकाचा वापर करण्यास चपखल ठरली. त्यामुळे आकाराने मोठे असलेल्या प्रश्नांची उत्तरं काढणं पण शक्य झाले.


जी.बी. डँटझिग

दुसऱ्या महायुद्धानंतर ही पद्धती जगजाहीर करण्यात आली व तिचा वापर शेती, उद्योग, परिवहन व इतर अनेक क्षेत्रांत होऊ लागला. कारण सगळीकडे उपलब्ध मर्यादित साधनांचा वापर सर्वात चांगल्याप्रकारे कसा करावा हा मूलभूत प्रश्न व्यवस्थापनाला पडत असे. सिंप्लेक्स मेथड हा विसाव्या शतकातील दहा उच्च गणिती उपलब्धीमध्ये समाविष्ट केला गेला आहे, यावरून त्याचा दर्जा व उपयुक्तता लक्षात येईल.

डँटझिग यांनी सरळरेषीय प्रयोजनाला आणखी खूप पुढे नेले व त्यांचे १९६३ साली प्रसिद्ध झालेले *Linear Programming and Extensions* हे पुस्तक या विषयाच्या अभ्यासासाठी अनिवार्य आहे. त्यांनी १९७३ साली

Compact City नावाचे एक वेगळंच पुस्तक टी. एल. साटी या दुसऱ्या प्रसिद्ध ऑपरेशन्स रिसर्च मधील तज्ज्ञाबरोबर सहकार्याने लिहिले. त्यांच्या दुर्दैवाने १९७५ साली अर्थशास्त्रासाठी देण्यात आलेलं नोबेल पारितोषिक तत्त्वतः लिनिअर प्रोग्रामिंगचा आर्थिक घडामोडीत वापर यासाठी संयुक्तपणे देण्यात आले, पण तो मान मिळाला अमेरिकेचे टी. सी. कूपमन्स व रशियातील एल. व्ही. कँटोरोव्हिच या दोन अर्थशास्त्रज्ञांना. पण निराश न होता डँटझिग यांनी आपलं संशोधन शेवटपर्यन्त चालू ठेवलं व अगणित विद्यार्थ्यांना मार्गदर्शन व प्रेरित केलं. त्यांच्या नावाने दोन पारितोषिके दरवर्षी नावीण्यपूर्ण व उपयोजितायुक्त अशा दोन ऑपरेशन्स रिसर्च किंवा मॅनेजमेण्ट सायन्समधील पीएच.डी. प्रबंधांना दिली जातात. डँटझिग यांचं गणिती – मूलभूत व उपयोजित – योगदान असामान्य म्हटलं पाहिजे. त्यांची ७ पुस्तके व १५० हून अधिक शोधलेख आहेत.

लिनिअर प्रोग्रामिंगसाठी विविध पद्धती आता विकसित झाल्या आहेत व होत आहेत. या पद्धतींनी काढलेले उत्तर पूर्णांकच असेल असं नाही, पण प्रत्यक्षात १२.४५ खुर्च्या व १७.६७ बाके तयार करा अशी उत्तरं चालणार नाहीत हे लक्षात घेऊन पूर्णांकात उत्तर प्राप्त करण्यासाठी इंटिजर प्रोग्रामिंग (Integer Programming) अशी एक उपशाखा निर्माण झाली. तसेच अनिश्चितता विचारात घेण्यासाठी स्टोकॅस्टिक प्रोग्रामिंग (Stochastic Programming) अशीही एक उपशाखा अस्तित्वात आली आहे. तिचा वापर वित्तीय क्षेत्रात पोर्टफोलिओ मॅनेजमेण्टसाठी व्यापक प्रमाणावर होतो.

व्यवहारात तसेच नैसर्गिकपणे अनेक गोष्टी सरळरेषीय नसून असरळरेषीय पद्धतीने कार्यरत असतात. याप्रकारच्या प्रश्नांसाठी नॉनलिनिअर प्रोग्रामिंग (Nonliner Programming) अशी उपशाखा विकसित झाली आहे. त्यात प्रामुख्याने क्वाड्रॅटिक प्रोग्रामिंग (Quadratic Programming), फ्रॅक्शनल किंवा हायपरबोलिक प्रोग्रामिंग (Fractional or Hyperbolic Programming), जॉमेट्रिक प्रोग्रामिंग (Geometric Programming) यांचा समावेश होतो. एकूणच या विषयाचा पसारा इतका वाढला आहे की त्याला मॅथेमेटिकल प्रोग्रामिंग (Mathematical Programming) असं व्यापक नाव देण्यात आलं आहे व त्या नावाची आंतरराष्ट्रीय सोसायटी असून त्याच नावाचं एक जर्नल ती प्रसिद्ध करते.

संगणक व मॅथेमॅटिकल प्रोग्रामिंग यांचा घनिष्ठ संबंध राहिला आहे. नवीन गणितीपद्धती संगणकाच्या वाढीव क्षमतेचा फायदा कसा घ्यावा या दृष्टीने

विकसित केल्या जातात, तर काही वेळा गणितीपद्धतींचा सुलभतेने वापर कसा करावा या अंगाने सॉफ्टवेअरचा विकास होत आहे. त्यामुळे महाकाय असे प्रश्न, जसे की जहाजनिर्मिती, इंधनशुद्धी करणारे कारखाने व आंतरराष्ट्रीय टेलिफोन्सची जाळी यांच्या व्यवस्थापनात उद्‌भवतात, सोडवणे शक्य झाले आहे.

मॅथेमॅटिकल प्रोग्रामिंग मध्ये अन्योनता किंवा ड्युयेलिटी (Duality) ची कल्पना फारच उपयुक्त ठरली आहे. त्याचं श्रेय पण डँटझिग यांस जातं. त्यांनी सर्वप्रथम सिद्ध केलं की प्रत्येक लिनिअर प्रोग्रामिंग प्रश्नाशी संलग्न असा जुळा (Dual) लिनिअर प्रोग्रामिंग प्रश्न अस्तित्वात असतो व त्यापैकी कुठलाही एक सोडवला तर दुसऱ्याचं उत्तर सहजपणे मिळतं. यामुळे प्रश्न सोडवण्यासाठी अनेक नवीन पद्धती निर्माण केल्या गेल्या तसेच अनेक बाबींचा व्यावहारिक अर्थ काढणे शक्य झालं ज्यांचा वापर व्यवस्थापनाला निर्णय घेण्यासाठी होतो. त्याचबरोबर काढलेलं उत्तर किती प्रमाणात मूळ प्रश्नातील आकडे बदलेपर्यंत बरोबर व उपयोगी राहील याचा अंदाज घेणे पण शक्य झालं (Sensitivity Analysis). या व इतर अनेक गणिती विकासामुळे मॅथेमॅटिकल प्रोग्रामिंगचा प्रत्यक्षात वापर सतत वाढतच आहे.

जागतिक पातळीवर विमानसेवा चालवणे, टेलिफोन्स व संगणकीय जाळ्यांचं संचालन करणे असे प्रचंड प्रकल्प पैसा, माहिती व मनुष्यबळ यांचं योग्य प्रकारे वितरण केल्याखेरीज शक्य नाही. म्हणूनच वितरणाचं गणित सोडवणं हे एक सातत्यपूर्ण आव्हानच असणार आहे. मानवाचं यापुढे परग्रहावर वस्ती आणि अंतरिक्ष संचार व नियंत्रण असं लक्ष्य आहे. साहजिकच अशा वैश्विक पातळीवर वितरण व्यवस्था आयोजित करणे व सुरळीतपणे चालवण्यासाठी खूप प्रगत गणितीपद्धती विकसित कराव्या लागतील. म्हणूनच मॅथेमॅटिकल प्रोग्रामिंग या विषयात संशोधन करण्यास भरपूर वाव आहे यात शंका नाही. आपल्या देशातील रेल्वे व्यवस्था, टपालसेवा, रेशन वितरण व्यवस्था अशी अनेक क्षेत्रं आहेत जिथे मॅथेमॅटिकल प्रोग्रामिंगचा वापर करून कार्यक्षमता वाढवता येईल. या विषयाप्रमाणेच त्याच्या उपयोजतेला मर्यादा दिसत नाही.

✤

टीप: या लेखातील छायाचित्र पुढील संकेत स्थळावरून पुनर्मुद्रीत करण्यात आले आहे व त्याबद्दल लेखक त्यांचा आभारी आहे.

जी.बी. डँटझिग - www2.informs.org

४६

गणिताला मानाचा मुजरा

+× ∑ ∫

गणितामुळे व्यक्तिगत, सामाजिक आणि सरकारी अशा विविध स्तरावरील व्यवहार व्यवस्थितपणे पार पाडणं शक्य होतं. लहानमोठे प्रोजेक्टही याच गणिताच्या आधारे पूर्ण करता येतात. उदा. पिरॅमिड्स, कुतुबमिनार आदी वास्तूंची रचना. प्राथमिक अंकगणित आणि भूमितीपासून सुरुवात झालेल्या गणिताचं आज मोठ्या प्रवाहात रूपांतर झालं आहे. अनेक गणिती सिद्धांत, संकल्पना आणि प्रक्रिया यांचा उपयोग कशा प्रकारे होऊ शकतो, हे अजून पूर्णतः समजलेलं नाही.

सर्वसाधारणपणे गणिताची दोन रूपं आहेत. एक म्हणजे व्यावहारिक उपयोगिता जसं, की क्षेत्रफळ काढणं, व्याज ठरवणं, साधनांचं वितरण करणं इत्यादी. दुसरं रूप म्हणजे अमूर्त (ॲब्स्ट्रॅक्ट) संकल्पनांचं गुंफलेलं जाळं. याचा वास्तव जगाशी संबंध जोडणं अनेक वेळा शक्य नसतं. याबाबत तीन

प्रमुख मतप्रवाह आहेत. एक म्हणजे प्लेटोवाद, जो गणिताकडे उदात्त अनुभूतीने बघतो. यात असं मानलं जातं, की १, २, ३ असे अंक किंवा बिंदू, वर्तुळ अशा भूमितीतील आकृत्या स्वतंत्रपणे अस्तित्वात आहेत आणि गणितज्ज्ञ त्या शोधण्याचा प्रयत्न करतात. म्हणून गणितातील प्रमेयं काळापलीकडची आहेत. त्यांचा मानवनिर्मित भाषा, इतिहास, कला यांच्याशी काही संबंध नाही. दुसरा रूपवाद किंवा औपचारिकतावाद (फॉर्मेलिझम). गणित म्हणजे काहीही अर्थ नसलेली चिन्हं मांडायची आणि त्यांच्यावर काही ठरावीक नियमानुसार प्रक्रिया करण्याचा खेळ असं यात मानलं जातं. त्या खेळातून काही अर्थ निघत असल्यास तो योगायोग समजावा.

तिसरा मतप्रवाह अंतःप्रेरणावाद म्हणून प्रसिद्ध (कन्स्ट्रक्टिविजम) आहे. या विचारानुसार गणित म्हणजे संपूर्णपणे मनुष्याच्या मनाची निर्मिती आहे आणि प्रत्येक मनुष्य ती वेगवेगळ्या पद्धतीने करतो. ती निर्मिती दुसऱ्या व्यक्तीपर्यंत पोहोचवण्यासाठी केवळ चिन्हं आणि भाषेचा आधार घेतला जातो. बहुतांश गणितज्ज्ञ प्लेटोवाद मानतात, पण रूपवादाचा उपयोग करतात.

गणितामध्ये मानवनिर्मिती ही महत्त्वाची भूमिका निभावते. मार्शल मॅकलुहन (१९११-८०) यांनी कोणत्याही मानवनिर्मितीचा (वस्तू, प्रक्रिया किंवा यंत्रणा) समाजावर फक्त चार व चार प्रकारे परिणाम होतो असं प्रतिपादित केलं. त्यांना मॅकलुहनचा चतुःष्फलक असं म्हटलं जातं. मॅकलुहन हे एक द्रष्टे होते. दळणवळण तंत्रज्ञानाचा समाजावर कसा परिणाम होईल, याबाबत त्यांनी अभ्यासपूर्ण विचार मांडले होते आणि ग्लोबल व्हिलेज ही संकल्पना मांडली. त्यांच्या नियमानुसार कोणत्याही मानवी संरचनेचे पुढील चार परिणाम होतात आणि महत्त्वाची बाब म्हणजे ते सर्व एकाच वेळी कार्यरत असतात. म्हणून त्यांचा एकत्रित अभ्यास आवश्यक ठरतो.

१) वृद्धी होणं (enhancement)
२) लुप्त होणं (obsolescence)
३) आशा पल्लवीत होणं (retrieval)
४) दोष समोर येणं (revival)

गणिताच्या निरंतर विकासामुळे ज्ञान आणि तंत्रज्ञानामध्ये वाढ होते. यामुळे मोठ्या प्रमाणावर फक्त अंदाजाने निर्णय घेण्यासारख्या पद्धती बाद होतात. तसंच निसर्गाची सर्व रहस्यं उलगडणं शक्य होईल, अशी आशा निर्माण होते. पण, त्याचबरोबर जुगार, शेअर्स मार्केट प्रभावित करणं या प्रकारच्या

अपप्रवृत्तींना खतपाणी मिळतं हे दिसून येतं. अर्थातच, यात गणिताचा दोष नसून आपण त्याचा उपयोग कसा करतो हे महत्त्वाचं आहे.

काही व्यक्तींना उपजतपणे गणितामध्ये गती असते. त्यामुळे त्या व्यक्ती गणितात चांगलं योगदान देऊ शकतात. पण जिद्द, चिकाटी आणि प्रयोगशीलता यांचा मिलाफ केल्यास गणितात पुढे येण्यास कुणालाही वाव मिळतो. मुख्य म्हणजे गणित हा छंद म्हणून जोपासण्यास काहीच आडकाठी नाही, कारण कागद आणि पेन्सिल एवढं साहित्य गणिती कार्यासाठी पुरेसं आहे. त्याचबरोबर कम्प्युटर उपलब्ध असेल, तर फारच चांगलं. गणिताचा उपयोग विविध समस्यांसाठी करणं तसंच गणित आणि संलग्न शाखांचा इतिहास अभ्यासणं, मनोरंजनात्मक गणिती कूटप्रश्न सोडवणं आणि तयार करणं असे वेगवेगळे मार्ग उपलब्ध आहेत. या प्रयत्नांचा मुख्य फायदा म्हणजे आपल्या विचारांना तर्कशुद्ध पद्धतीने मांडण्याची सवय होते. ज्याचा फायदा आपल्या इतर सर्व कामांत होतो. अशी शिस्त नेहमीच उपयोगी पडते. अनेक वेळा अनपेक्षित उद्‌भवणाऱ्या प्रश्नांना सामोरं जाण्यास मदत करते.

या पुस्तकात अनेक वेळा गणिती विश्लेषण पद्धतींचा उपयोग वेगवेगळ्या क्षेत्रांमध्ये कसा करता येतो, हे आपण पाहिलं. यावरून लक्षात येतं की गणिताधारित कित्येक प्रकारच्या करिअर्स विकसित करण्यासाठी संधी उपलब्ध होत आहेत. उदाहरणार्थ, गणिताचा अभ्यास केल्यामुळे शिक्षण आणि संशोधन या क्षेत्रांबरोबरच आता स्टॅटिस्टिक्स, इन्शुरन्स, मॅनेजमेण्ट, उत्पादन, एरोस्पेस सायन्स, डिफेन्स अशा विविध क्षेत्रांमध्ये करिअर करणं शक्य आहे. महत्त्वाचं म्हणजे गणिती बैठक असणाऱ्या व्यक्तींना इतर अनेक क्षेत्रांमध्ये प्रवेश करणं, जम बसवणं शक्य आहे. मात्र, काही अपवाद वगळता दुसऱ्या क्षेत्रातून गणिती वर्तुळात पाय रोवणं फारच कठीण आहे.

माणसाला दुसऱ्या ग्रहावर राहायला जाणं, जागतिक स्तरावर व्यवस्थापन करणं आणि नैसर्गिक आपत्तीवर मात करणं यांसारखी उद्दिष्टं गाठायची असल्यास गणिताची कास सोडता कामा नये. म्हणजेच गणिती संशोधन सातत्याने होत राहील याची काळजी घेतली पाहिजे. यासाठी पुरेसं आर्थिक पाठबळ आणि मुख्य म्हणजे वातावरण आणि सामाजिक आणि राजकीय स्थैर्यता असणं आवश्यक आहे. एका अर्थाने गणिती संघटन प्रक्रिया (बेरीज, गुणाकार) यांचा उपयोग समाजात एकजूटता वाढवण्यासाठी व्हावा हीच अपेक्षा आहे. वजाबाकी आणि भागाकार समाजाला घातक आहेत, कारण

विघटनामुळे शक्ती क्षीण होते हे मूलभूत सत्य आहे. म्हणून या पुस्तकात प्रत्येक लेखाच्या सुरुवातीला $+$, $\times$, $\sum$, $\int$ ही गणिती संघटन व्यक्त करणारी चिन्हे वापरली आहेत.

एकूणच गणिताची व्यापकता आणि उपयुक्तता इतकी प्रचंड आहे, की त्यांचं संपूर्ण वर्णन करणं शक्य नाही. म्हणूनच या पुस्तकाचा इथेच समारोप गणिताला मानाचा मुजरा करीत होणे इष्ट वाटतं.

✤

निवडक संदर्भ सूची

१. आपटे, मो., *गणिताच्या पाऊलखुणा,* डोंबिवलीः अश्वमेध प्रकाशन, १९९३.
२. डिंगणकर, म. वि., *कापरेकरः प्रतिभावंत गणिती,* पुणेः नवीन उद्योग, २००५.
३. थत्ते, नं. व थत्ते, सु., *गणितराज्यातील गंमतगोष्टी,* मुंबईः ग्रंथाली, २००१.
४. देशपांडे, स. पां., *गणितानंदी कापरेकर,* मुंबईः अक्षर प्रकाशन, २००५.
५. देशमुख, चिं., *तत्त्वज्ञ-संख्याशास्त्रज्ञ विद्याधर गोंडाबे,* मुंबईः ग्रंथाली, २००६.
६. फडके, ना. ह., *भारतीय गणिती,* पुणेः वरदा प्रकाशन, २००१ (तिसरी आवृत्ती)
७. बापट, र., *ऐसे प्रमेये रसिके,* पुणेः राजहंस प्रकाशन, २००४.
८. भागवत, र. म., *दैनंदिन जीवनातील गणित,* नवी दिल्लीः नॅशनल बुक ट्रस्ट, २००४ (चौथी आवृत्ती).
९. साकुरीकर, शु., *फ्लॉरेन्स नाइटिंगेल,* पुणेः राजहंस प्रकाशन, २००४ (अनुवादः क. हर्डीकर).

---

1. Aczel, A.D., *Fermat's Last Theorem – Understanding the Secret of an Ancient Mathematical Problem*, New York: A Delta Book, 1996.
2. Allman, E.S. and Rhodes, J.A., *Mathematical Models in Biology – An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
3. Ascher, M., *Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas across Cultures*, Princeton: Princeton University Press, 2002.
4. Aven, T., *Foundations of Risk Analysis*, Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons, 2003.
5. Bellman, R., *Mathematical Methods in Medicine*, Singapore: World Scientific, 1986.
6. Berlinghoff, W.P. and Gouvea, F.Q., *Math through the Ages – A General History for Teachers and Others,* Farmington, ME: Oxton House Publishers, 2004.
7. Byres, W., *How Mathematicians Think using Ambiguity, Contradiction and Paradox to Create Mathematics*, Princeton: Princeton University Press, 2007.
8. Cohen, I.B., *The Triumph of Numbers – How Counting Shaped Modern Life*, New York: W.W. Norton & Company, 2005.

9. Davis, P.J. and Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Cambridge: Birkhauser, 1981.
10. Gardiner, A., *Understanding Infinity – The Mathematics of Infinite Process*, New York: Dover Publications, 2002.
11. Hardy, G.H., *A Mathematician's Apology*, Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
12. Hersh, R., *What is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press, 1997.
13. Hillier, F.S. and Lieberman, G.J., *Introduction to Operations Research*, Boston MA: McGraw-Hill, 2005. (Eighth edition)
14. Joseph, G.C., *The Crest of the Peacock – Non-European Roots of Mathematics*, London: Penguin, 1994.
15. Kapur, J.N. (Ed.), *Some Eminent Indian Mathematicians of the Twentieth Century, Vol. I – IV*, New Delhi: Mathematical Sciences Trust Society, 1994.
16. Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, New York: John Wiley & Sons, 2001.
17. Morse, P.M., *Library Effectiveness: A Systems Approach*, Massachusetts: MIT Press, 1968.
18. Pasamentier, A. S. and Lehmann, I., *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*, New York: Prometheus Book, 2004.
19. Paulos, J.A., *A Mathematician Reads the Newspaper*, New York: Dubleday, 1996.
20. Pickover, C.A., *Wonders of Numbers – Adventure in Mathematics, Mind and Meaning*, Oxford: Oxford University Press, 2001.
21. Polya, G., *How to Solve It*, Princeton: Princeton University Press, 1988.
22. Polya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton: Princeton University Press, 1990.
23. Rudman, P.S., *How Mathematics Happened – The First Thousand Years*, New York: Prometheus Books, 2007.
24. Taha, H.A., *Operations Research: An Introduction*, New Jersey: Prentice Hall, 2006. (Eighth edition)
25. Wiener, N., *I am a Mathematician*, New York: Doubleday, 1956.
26. Williams, J.D., *Complete Strategyst,* New York: Dover Publications. 1996.

व्यक्तीनाम सूची

अल-खारझमी, १४६
अपोलोनिअस, १४५

ॲरिस्टॉटल, ८८,१४५

आइनस्टाइन, ए., १६, ७१, ८०, ९२, १२१, १६४
आर्किमिडीज, ६, १७, १४५, १५९
आटिया, एम. एफ., ८
आशर, एम., १८३ (*)
आर्यभट्ट, १४६
ऑमन, जे., १३८
ऑयलर, एल., ९१, ९३, १५०, १५६, १५८, १६६
ऑलमन, इ. एस., १८३ (*)

इटो. के., ६

उमर खय्याम, १४६

एडलमन, एल., ११५
एपेल, के., १५७
एबेल, एन. एच., १६०, १६२
एरडॉश, पी., ६४, ६५
एरलँग, ए. के., २६
एलफोर्स, एल. व्ही., ७
एक्झेल, ए. डी., १८३ (*)
एव्हन, टी., १८३ (*)

ओकूनकोव, ए., ९
ओघट्रेड, डब्ल्यू., १२१
ओसबोर्न, एम. जे., १३८

करमरकर, न., १०५
कल्याणपूर, जी., १५४
कपूर, जे. एन., १८४ (*)
कँटोरोव्हिच, एल. व्ही., १७७
कॅण्टोर, जी., ८०, ८१, १६१, १६६
कॅरोल, एल., ५१
कॅस्पेरॉव्ह, जी., ५२
कापरेकर, द. रा., ५१, ५३, १८३
कार्डनो, जी., १५२
कूपमन्स, टी. सी., १७७
केंगशने, एस., १४४
केपलर, जे., १२१
केम्प, ए. बी., १४७
केले, ए., १५७
कोंटसचिव, एम., ९
कोडिरा, के., ७
कोन्स, ए., ८
कोहेन, पी. जे., ८
कोहेन, आय. बी., १८३ (*)
कोशी, टी., १८४ (*)
कौची, ए., १६०
क्युलेट, एल., १५३
क्युलेन, डी. जी., ८
क्रासली, जे. एन., १४४
क्रोनेकर, एल., १६१

गॅल्वा, इ., १६०-१६२
गार्डनर एम., ५१, १४१
गार्डीनर, ए., १८४ (*)
गाल्टन, एफ., १५३

गॉट, जे. आर., १३०
गॉवर्स, डब्ल्यू. टी., ९
गुथरे, एफ., १५७
गोडांबे, वि. प्र., १४१, १५४, १८३
गोदेल, के., २१, ९२, ९३
गोल्डबॅक, सी., ६३, १५८
गौव्हीए, एफ. क्यू., १८३ (*)
गौस, सी. एफ., ६, ७९-८१, ११७
ग्रोथेण्डाइक, ए., ८

चॉम्स्की, एन., ४०

जर्मेन, एस., १५६
जेरोस्लोव्ह, आर. जी., १४१
जोन्स, व्ही. एफ. आर., ८
जोसेफ, जी. सी.,१८४ (*)

झाडे, एल., १६९
झेलमॅनोव, इ., ८

टाग, टी., ८
टाहा, एच. ए., १८४ (*)
टोलमी, १४५
ट्युरिंग, ए., ८८, ८९, १६१

डंकन, जी. टी., १४१
डग्लस, जे., ७
डँटझिग, जी. बी., १७६-१७८
डँटझिग, टी., १७६
डायफण्टुस, १४६, १५५

डिंगणकर, म. वि.,
५१, १८३
डिकन्स, सी., ४८, ४९
डीनफेल्ड, एस. के., ८
डीरीचले, पी. जी. एल.,
१५६
डेलमिन, आर., १२१
डेव्हीस, पी. जे.,
१८४ (*)
डोनाल्डसन, एस. के., ८

थत्ते, नं., १८३
थत्ते, सु., १८३
थस्टन, डब्ल्यू. पी., ८
थॉमसन, जे. जी., ८
थीओन, १६०
थेल्स, १४५
थोम, आर., ७

देकार्त, आर., ९०, ९१,
९३, १५०, १६४
देलिग्न, पी. आर., ८
देशपांडे, अ. पां., १४२
देशपांडे, पु. ल., ११०
देशपांडे, स. पां.,
५१, १८३
देशमुख, चिं., १८३

धारवडकेर, आ., १५७

नॅश, जे., १३६, १३८
नाइटिंगेल, एफ.,
४२-४५, १८३
नेपियर, जे., १२०
नेव्हालिना, आर., ६
नोव्हिकोव्ह, एस., ८
न्यूटन, आय., ७९, ८६,
८७, ८९, ९२
न्यूमान, जे. व्ही., ९२,
९३, १३५

पाटकर, वि., १०९
पापुस, १४६
पायथागोरस, १४५
पासमेंटिअर, ए. ए., १८४ (*)
पास्कल, बी., ८३-८५,
१२८, १५२
पाँयकर, एच., ८५, १६६
पॉलस, जे. ए., १८४ (*)
पेआनो, जी., २०
पेनरोझ, आर., ८९
पेरलमन, जी., ९
पोल्या, जी., १८४ (*)
प्रभू, एन. यू., २६
प्लेटो, १४५, १८०
पिकोव्हर, सी. ए.,
६३, १८४ (*)

फडके, ना. ह., १८३
फर्मा, पी., ८२, ८३, ८५,
१५२, १५५, १५६, १८३
फाल्टिंग्स, जी., ८
फिबोनास्सी, एल.,
११-१३, १८४
फिशर, आर., ए., १५३
फील्ड्स, जे. सी., ५, ६
फोरिअर, जे., ८४, ८५
फेफरमन, सी. एल., ८
फ्रीडमन, एम. एच., ८

बर्नोली, जे., १२८, १५२
बर्नस्टाइन, पी. एल., १४२
बॅबेज, सी., ८७, ८९
बाकर, ए., ८
बापट, र., १८३
बायरेस, डब्ल्यू.,
१८३ (*)
बिरखॉफ, डी., १५७
बूल, जी., ८७-८९
बर्लिंघोफ, डब्ल्यू. पी.,
१८३ (*)
बेलमन, आर., १८३ (*)
बोउरगेन, जे., ८
बोम्बारी, इ., ८
बोरचर्ड्स, आर. इ., ९
बोलाई, जे., ७१, १६४
बोस, आर. सी., १५४
ब्रह्मगुप्त, ६३, १४६

भागवत, र. म., १८३
भारतीकृष्ण तीर्थजी
महाराज, ५५
भास्कर, १४६
भास्कराचार्य, १४०,
१४६, १४९

ममफोर्ड, डी. बी., ८
महलानवीस, पी. सी.,
१५३, १५४
मँडेलब्रॉट, बी., ४०, १६६
मॅकमुलेन, सी. टी., ९
मॅक्सवेल, जे. सी., १६५
मॅकलुहन, एम., १८०
मान्झिम, ए., १२१
मार्कोव्ह, ए. ए., ९५-९७
मारग्युलिस, जी. ए., ८
मायरसन, आर., १३८
मालथ्यूस, टी., ९८
मास्किन, इ., १३८
मॉर्गन, ए. डी., १५७
मॉर्गेस्टर्न, ओ., १३५

मिलनोर, जे. डब्ल्यू., ७
मूर्ती, जी. एस., ११६
मेण्डेल, जी., १००
मोरी, एस., ८
मोर्स, पी. एम., १३१, १८४ (*)

युक्लिड, ७१, १४५, १६३, १६४
यू, एस. टी., ८
यूल, जी. यू., १५३
योकेझ, जे. सी., ८

रंगनाथन, एस. आर., १३३, १३४
रसेल, बी., ८८, ८९
रामदोराय, एस., ७
रामानुजन, एस., ७, ६३, ९१–९३, १४२, १६१
राव, सी. आर., १५४
रिबेट, के., १५६
रिमान, बी., १६, ७१, ८०, १६४
रिव्हेस्ट, आर., ११५
रोजेट, पी., १२१, १२६
रोथ, के. एफ., ७
रूडमन, पी. एस., १८४ (*)
ऱ्होडस, जे. ए., १८३ (*)

लवायझिये, ए. एल., १५०
लॅम्बार्ट, जे., ८४, ८५
लाप्लास, पी., ८४, ८५, १५२
लाफोरज, एल., ९
लामे, जी., १५६
लायबनित्झ, जी., ७८, ७९, ८१, १५०
लिजेण्डर, ए. एम., १५३, १५६
लिबरमन, जी. जे., १८४ (*)
लीआँस, पी. एल., ८
लुन, ए. डब्ल्यू. सी., १४४
लेसिंग, डी., १३९
लेहमान, आय., १८४ (*)
लोबाश्वेस्की, एन. आय., ७१, १६४

वाइल्स, ए., ९३, १५६
वाइर्सस्ट्रास, के., ८०
वाइनर, एन., १८४ (*)
वॉफ्सेल, पी., १५६
विटेन, इ., ८
विलियम्स, जे. डी., १३८, १८४ (*)
वेरनर, डब्ल्यू., ९
व्हॅब्रेन, ओ., १५७
व्हियाना, एम., ७
व्होइवोडस्की, व्ही., ९
व्हाइटहेड, ए. एन., २१

शामिर, ए., ११५
शेलिंग, टी. सी., १३८
श्वार्ट्झ, एल., ७
श्रीखंडे, एस. एस., १५४
साकुरीकर, शु., १८३
सिंग, एस., ११५
सीझर, जे., ४७
सुखात्मे, पी. व्ही., १५४
सुखात्मे, बी. व्ही., १५४
सेर, जे. पी., ७
सेल्टन, आर., १३८
सेलबर्ग, ए., ७
स्मिथ, बी., ११८

हरसनायी, जे., १३८
हॅमिल्टन, डब्ल्यू. आर., १५७
हॅले, इ., ४६, ४७, १५२
हाकेन, डब्ल्यू., १५७
हायजेन्स, सी., १५२
हार्डी, जी. एच., १४२, १८४ (*)
हॉकिंग, एस., ८९
हिरोनाका, एच., ८
हिलीअर, एफ. एस., १८४ (*)
हिल्बर्ट, डी., २१, ८०
हीवूड, पी. जे., १५७
हुजुरबजार, व्ही. एस., १५४
हुरविझ, एल., १३८
हर्श, आर., १८४ (*)
होरमॅण्डर, एल., ७
ह्यू, एल., १४४, १४९

(*) निवडक संदर्भ सूचीतील इंग्रजी पुस्तकांचे लेखक.

विषयसूची

अंकगणित, ४, १५, ५५, ६०, ७४, ७५, ८०, ८४, ११५, १२०, १२२, १४६, १४८, १४९, १६०, १६३, १६९, १७९
अंकशास्त्र, ५१, ६२–६५, ७८, ८३, ९१
अंतराळशास्त्र, १७

अर्थशास्त्र, १२, १७, ११३, १२८, १५१, १७७
अनंत, ७२, ७४, ८०, १६१, १६४
अनुचर, २०
अनुभवातीत अंक, ६२, १११, ११४, ११६
अनोखे आकर्षक सिद्धांत, १६८
अन्योनता, ३१, ७२, १७८
अपरिमित श्रेणी, ७९
अपरिमेय, ६२
अपेक्षित मूल्य, १५२
अपूर्णांक, ४०, ६२, ७४, १४९
अमूर्त, २–५, १६, ३५, ५६, १०८, १११, ११३, १६०, १७९
अरेषीय गणित, १६९
अँथ्रोपिक सिद्धांत, ४८

ॲक्चुरिअल सायन्स, ४७, ६७, १५२
ॲप्रॉक्सिमेशन मेथड, १३

आवर्तन, ३८, ३९, १२२, १७६
आर्टिफिशियल इण्टलिजिन्स, ८९

ऑपरेशन्स रिसर्च, १७, २३, २४, २६, २८, ३१, ३६, ६०, ६६, ६८, ८७, १०८, १३१, १३६, १७६, १७७, १८४

इंडियन स्टॅटिस्टिकल इंस्टिट्यूट, १५३
इकोनोमेट्रिक्स, १७
इनफिनीट सिरिज, ७९, ८०
इण्टरप्रीटीव्ह स्ट्रक्चर मॉडेलिंग, ३६, ७६, १३३
इन्व्हेण्टरी कंट्रोल, २७–३०

एनलॅटिक हायरारकी प्रोसेस, ३६

उद्रामी पद्धती, १३

औपचारिकता, १९, २१, १८०

कॅलक्युलस, १५, ७९, ८६
कापरेकर स्थिरांक, ५१, ५३,
कोलाहल, १६८
कुतूहल संस्था, १२२
क्रीडा–सांख्यिकी, ६१
क्रिटिकल पाथ, १०३
क्लिष्टता, ७६

खगोलशास्त्र, १७, ५६, ८४, ८७, ११९, १२१
खेळ, ५२, ५८–६१, ६४, १०७, १०८, १११, १२२, १३०, १५२, १६९–१७१, १८०

गणनशास्त्र, ७९, ८०, ११६, १६३
गणित कॉंग्रेस, ६
गृहितक, २०–२२, ३७, ७०–७२, १२४, १४५, १६४
ग्रंथालय, ६७, १०८, १२२, १३१–१३४,
ग्रंथालयशास्त्र, १३३

जटिलता, १६७, १६८
जनगणना, ४८
जादूई चौरस, ५०, ५१, ९१
जस्ट–इन–टाइम, २९
जाळी, ३९, ४१, १०२–१०५, १७८
जीवशास्त्र, ८९, ९१, १३७
जीपीएस, ११६

झेण्ट्रलबाट मॅथ, १६

टाइम सीरीज, ३६
टोपोलॉजी, १०१, १६५, १६६
ट्रायल ॲण्ड एरर, १३

डिफरन्स इक्वेशन्स, १००
डिस्ट्रिब्युशन
–एक्सपोनेन्शियल, २५, ३१
–काय स्क्वेअर, १२१
–नॉर्मल, ७९, ११७, ११८, १२१
–पॉयसां, २५, १२९
डेमोग्राफी, ६७, ९९
ड्युयेलिटी, ७२, १७८

तडजोड तंत्र, ३७
तर्कशास्त्र, ७०, ७५, ८८, ९२, १४५
त्रिकोणमिती, १३, १५, ७०, ११६, १२१, १४६

थिअरि
–अन्योनता, ७२, १७८
–इन्फोर्मेशन, १०४
–कॉम्प्लेक्सिटी, १८
–कोडींग, १०४
–क्युईंग, २३, २४, २६, १३३
–गेम, ३६, ६०, ६८, ९३, १३५–१३८
–ग्राफ, ३८, ९१, १०१, १०५, १३४, १४२
–ग्रुप, १६०, १६१, १६५
–डिसिजन, ३६, १३३
–ड्युयेलिटी, ७२, १७८
–ड्रामा, १३८
–नंबर, १३, ५१, ९२, १४२
–प्रोबेबिलिटी, ६४
–फझी सेट, १६९
–रिप्लेसमेण्ट, ३३
–रिलायबिलिटी, ३१–३३
–रिस्क, १८, ३६
–सेट, ८०, १६१, १६९
–स्ट्रिंग, १७

दशमान पद्धत, ६४, ७५, १४६, १४८
द्विभाजन, १६८
द्विमान पद्धत, ६४, ७५, १५७

धुसरता निर्देशांक, १७२, १७३

निगमन पद्धती, ७१
नेटवर्क ॲनालिसिस, ३८, ३९, १०१, १०२
न्यूमरिकल ॲनालिसिस, १६

परफेक्ट नंबर, ६३
परितत्त्व गणित, ११६
परिमेय संख्या, २१
पर्ट, ३६, ५९, १०३, १३३
पारितोषिक
–एबेल, ७
–गौस, ६
–नेव्हालिना, ६
–नोबेल, ५, ६, ६४, ८८, १३८, १३९, १७७
–रामानुजन, ७
पास्कल ट्रॅंगल, ८३
पॉप्युलेशन स्टडीज, ६७
पुरस्कार, ५–७, ९, १०५, १३१, १३९
पूर्णांक, ४०, ६२, ६३, ७४, ८३, ११४, ११५, १५५, १७७
प्राइम नंबर, ६३, ११४, १५६
प्रिझनर्स डायलेमा, १३६
प्रॉडक्शन, ३०
प्रॉबेबिलिटी, ३६
प्रोग्रामिंग
–इंटिजर, १७७
–काम्प्रोमाइझ, ३७
–क्वाड्रॅटिक, १७७
–जॉमेट्रिक, ७३, १२६, १७७
–डायनॅमिक, १४२
–नॉनलिनिअर, १७७
–फ्रॅक्शनल, १७७
–मॅथेमेटिकल, १२२, १७७
–लिनिअर, ३६, ६०, ७२, १०४, १०५, १२२, १२५, १३२, १३६, १७५–१७८
–स्टोकॅस्टिक, १७७
–हायपरबोलिक, १७७

फझी लॉजिक, १६९
फील्ड्स मेडल, ५–७
फेसिट मशीन, १२२
फोर कलर प्रॉब्लेम, १५७

बायनोमियल थिअरम, ८३
बीजगणित, ४, १३, १५, ४०, ५५, ७९, ८०, ८८, ९१, १२८, १४०, १४४, १४६, १६०, १६४, १६५, १६९
बुद्धिबळ, ५२, ५९, ११२
बुलयन अलजेब्रा, ८८
बुलयन सर्च, ८८

भारतीय सांख्यिकी संस्था, १५३
भूमिती, ३, ४, १३, १५, २०, ३८–४०, ४६, ७०, ७१, ७३, ८०, ८३, ८४, ९१, १०६, ११०, ११२, ११६, १४४–१४६, १६०, १६३–१६६, १६८, १७९, १८०
भूमिती,
–अफाईन, १६५
–एनेलिटीकल, ९१, १६४
–कंगोरी, ४०, १६६, १६९
–कोओर्डिनेट, ९१, १६४, १६५
–नॉन–युक्लिडीयन, ७१, ८४
–पृष्ठ, ७१, १६४
–प्रोजेक्टिव, १६५
–रबरी चादर, १६५
–सिमित, १५७
भौगोलिक माहिती संयत्रणा, १०४
भौतिकशास्त्र, १३, १७, ४८, ७९, ८६, ९७, १२६, १३२, १४५, १५३, १५९, १६०, १६४, १६५, १६८

मनोरजंनात्मक गणित, ५१–५३, ६३, १०७, १८१

मराठी विज्ञान परिषद, ११२, १२२, १४१, १४२
महिला गणितज्ज्ञ, १४६, १५६, १६०, १६२
मॅकेनिक्स, १६
मॅथेमॅटिकल रीव्ह्यूज, १६, १०९
मॅनेजमेण्ट सायन्स, २३, २४, १७७
मार्केटिंग, ३०, ३६
मार्कोव्ह चेन, ९५–९७, १०१, १३३
माहितीशास्त्र, १३१, १३२, १३४, १६८
मिती, ४०, ५२, ७६, १२२, १२६
मेटा गेम, १३७

रम्य संख्या, १२
रसायनशास्त्र, ८९, १५०, १६८
रसेलचा विरोधाभास, ८८
रांग, २३–२६, ३१, १२९, १३२, १३३
रांगोळी, ३८–४१
रिअल आणि कॉम्प्लेक्स ॲनालिसिस, १६
रिक्रियेशनल गणित, ५०
रिग्रेशन ॲनालिसिस, ३६, १२५
ऱ्हासीय संरचना सिद्धांत, १६९

लाप्लास ट्रान्सफर्मेशन, ८४
लायब्ररी मॅनेजमेण्ट, १३१
लॉजिस्टिक मॉडेल, ९९
लीलावती, १४०
लेखन, ४९, ६४, ८१, १३३, १३९–१४२, १४४, १७१, १७३, १७४
लोकसंख्याशास्त्र, ९९
लोगॅरिथम टेबल्स, १२०

वास्तव संख्या, २१
विगमन पद्धती, ७१, ७२
वितरण, ११७, ११८, १७५, १७७–१७९
विमाशास्त्र, ४७, ६७, १५२
वेटिंग लाइन मॉडेल्स, २३, २४
वैचारिक भांडवल, ११२
वैदिक गणित, ५४–५७
व्यवस्थापन, २४, २७–३०, ३५, ३९, १०२–१०५, १२४, १२६, १३१, १३२, १७५, १७६, १७८, १८१

व्यापक संरचनाशास्त्र, १३३
व्यामिश्रता, १६८, १७०

संख्या जर्नल, १५३
संख्या सिद्धांत, १३
संगणकशास्त्र, १३, १७
संभाव्यता, ८४, ९४, ९५, १००, १०८, ११७, १२७–१३०, १३२, १५२, १५७, १६८
संरचना, १२, २६, ३९, ५६, ७१, ७५, ८३, ११४, १३४, १४०, १६५, १६६, १६८, १६९, १७४
संहिता, २१
सत्यता, २१
समप्रमाणबद्धता, ३९, १०७
सापेक्षता सिद्धांत, १६, ७१, ८०
सामान्य वितरण, ११७
सांख्यिकी, १८, २५, २८, ३६, ४४, ४५, ४८, ६१, ६६, ६८, ७९, ९४, ९५, ९७–१००, १०४, १०८, ११७, १२१, १२९, १४०, १५१–१५४, १६८, १७४, १७६
सॉफ्टवेअर्स, २९, ९७, १३३, १३६,
सॉफ्ट ऑपरेशन्स रिसर्च, ३६
सिम्युलेशन, १२५, १२७, १३३
सिंप्लेक्स मेथड, १०५, १७६
सिस्टिम, २४, २५, ११५
सीपीएम, ३६, ५९, १०३, १३३
सुसंगती, २०, २१
सोनेरी संख्या, १२
सौंदर्य, १०–१४, ८५, १७२
स्टॅटिस्टिक्स, १८, २३–२६, ३१, ४२, ४४, ६०, ६१, ६४, ६६, ८४, १२५, १२९, १३१, १५१, १५३, १५४, १८१

स्लाइड रूल, १२१
स्वयंविघटन, ४०
स्वयंसंघटन, ४०, १६८
स्थित्यंतरिय संभाव्यता, ९५

हायड्रोडायनॅमिक्स, १६, १०१
हायड्रोस्टॅटिक्स, १६
हायपर गेम, १३८
हायपोथिसिस टेस्टिंग, ३६, ११८

ह्युरिस्टिक्स मेथड, १३

क्षेत्रविद्या, १६५

★★★

गणिताची अपूर्वाई

गणिताची सुरुवात गणना व मोजदाद करणे या माणसाच्या प्राथमिक गरजेपासून झाली. मात्र त्याचा विस्तार आता अथांग समुद्राप्रमाणे झाला असून त्यात किती अमोल रत्ने दडलेली आहेत याची कल्पना करणे देखिल कठीण आहे. आपल्या दैनंदिन व्यवहारापासून ते उच्च तंत्रज्ञान विकसित करण्यापर्यंत सर्व बाबीत गणिताचा सहभाग अनिवार्य झाला आहे. निसर्गाची उर्वरित रहस्ये उलगडणे आणि अखिल ब्रह्मांडात भरारी मारणे अशा आपल्या स्वप्नाची पूर्ती गणिताच्या पुढील प्रगतीवरच अवलंबून आहे यात शंका नाही.

आपल्या शैक्षणिक अभ्यासक्रमात गणिताचे अमूर्त रूप व तार्किक तांत्रिकता यांवर अधिक भर दिल्यामुळे सर्वसामान्यपणे गणिताबाबत गैरसमज किंवा भीती आढळते. मात्र गणिताचे आणखी अनेक पैलू आहेत व रंजक उपयोगही आहेत याबाबत माहिती असणे गरजेचे वाटते. त्या दृष्टीने या पुस्तकात गणिताच्या विविध छटा आणि उपयोजितेचा व्यापक आवाका सोप्या भाषेत तसेच उदाहरणासह मांडला आहे. गणिताची ही ओळख सर्वांना आवडेल व गणिताची नवीन दालने उघडण्यास मदत करेल असा विश्वास वाटतो.

संपर्क :

डॉ. विवेक पाटकर

डी-१, अनिता को-ऑप. सोसायटी,

प्लॉट ६१२, सेक्टर ६, चारकोप,

कांदिवली (पश्चिम), मुंबई ४०० ०६७.

इ-मेल : vnpatkar2004@yahoo.co.in